

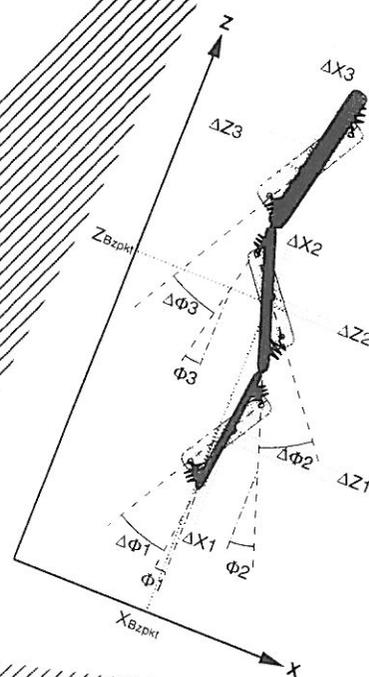
M. Günther

**Computersimulationen von Abstürzen
mittels biomechanischer Ganzkörpermodelle**

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
FRANK HOSPACH
aus Albstadt/Ebingen

1993



Tag der mündlichen Prüfung: 12. Mai 1993

Dekan: Prof. Dr. rer. nat. Heinz Clement

1. Berichterstatter: Prof. Dr. rer. nat. Hanns Ruder
2. Berichterstatter: Prof. Dr. med. Heinz-Dieter Wehner

Mit finanzieller Unterstützung des Hauptverbandes der gewerblichen Berufsgenossenschaften e.V. ausgeführte Forschungsarbeit

Abstract

Hospach, Frank

Computersimulationen von Abstürzen mittels biomechanischer Ganzkörpermodelle

Zur Erstellung der Bewegungsgleichungen für dreidimensionale Mehrkörpersysteme, wie sie in der Biomechanik Anwendung finden, wurde ein Gleichungsgenerator geschrieben. Dieser erzeugt Fortran- oder C-Code für die Bewegungsgleichungen von Systemen aus bis zu 30 Starrkörpern, die durch Kugelgelenke gekoppelt sind oder aber keinen Zwangsbedingungen unterliegen. Der Gleichungsgenerator arbeitet nach einer abgewandelten Form des Newton-Euler Verfahrens, die es ermöglicht, Mehrkörpersysteme mit sehr vielen Freiheitsgraden zu bewältigen. Für den Fortran-Code der automatisch aufgestellten Bewegungsgleichungen wurde eine Programmumgebung geschaffen, die es erlaubt, mit relativ geringem Aufwand die Bewegungsgleichungen numerisch zu integrieren und problemspezifische Algorithmen für äußere oder innere Kräfte und Momente des Mehrkörpersystems über klare Schnittstellen einzubinden.

Mit einer vereinfachten Version des Gleichungsgenerators für ebene Probleme, wurden dann zweidimensionale Ganzkörper-Modelle für den Menschen erzeugt. Da mit diesen Modellen Abstürze auf Baustellen simuliert werden sollten, bei denen stoßartige Beschleunigungen auftreten, wurden sie als sogenannte Schwabbelmassenmodelle ausgeführt, bei denen der größte Teil der Körpermasse quasielastisch und gedämpft an das Skelett gekoppelt ist. Bei hochbeschleunigten Vorgängen wie dem Landungsstoß nach einem Absturz oder Niedersprung, können ausschließlich Schwabbelmassenmodelle verlässliche Simulationsergebnisse liefern.

Nach einer Stoßdauer beim Auftreffen auf dem Boden, die typischerweise unter 50 ms liegt, wird die Motorik, das heißt die aktive Bewegungssteuerung des Menschen für das mechanische Verhalten bedeutungsvoll. Um auch über die Stoßdauer hinaus realistische Simulationsdaten zu erhalten, wurden verschiedene Ansätze zur Bewegungssteuerung entwickelt. Außerdem wurden Algorithmen entwickelt, die den Verlauf der inneren Drehmomente beim Erreichen der Gelenkbegrenzungswinkel beschreiben und damit die Anschläge in den Gelenken modellieren.

Die Validierung der Modellparameter erfolgte mit Hilfe von Probandenexperimenten. Bei Sprüngen des Verfassers auf federnde Gerüstbohlen wurden Beschleunigungswerte gemessen. Durch Parameterstudien sind dann Meßwerte und Simulationsdaten möglichst gut zur Deckung gebracht worden. Das validierte Modell diente dazu, Abstürze auf Gerüstbohlen mit unterschiedlichen mechanischen Eigenschaften zu simulieren, und den Einfluß der Bohlenmasse sowie der Federhärte der Bohle auf die Stoßkraft systematisch zu untersuchen.

Zu Vergleichszwecken wurden die gemäß DIN 4420 als Belastungstests für Gerüstbohlen vorgeschriebenen Kugelfallversuche durch ein System zweier schwingender Massen modelliert. Die Bewegungsgleichungen dieses Modells sind analytisch gelöst und die Parameter dem Experiment angepaßt worden.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und Ziele	2
2	Generierung der Bewegungsgleichungen	6
2.1	Zwei Varianten des Newton-Euler Verfahrens	6
2.2	Der Bewegungsgleichungsgenerator bgg	10
2.2.1	Aufstellung der Newtonschen Gleichungen	11
2.2.2	Aufstellung der Eulerschen Gleichungen	12
2.2.3	Die Zwangsbedingungen	15
2.2.4	Die Umgebung von bgg	17
2.3	Die Bewegungsgleichungen im 2D-Fall	21
3	Biomechanische Schwabbelmassen-Modelle	22
3.1	Möglichkeiten zur Modellierung der Schwabbelmassen	23
3.1.1	Modellierung der Schwabbelmassen als Starrkörper	23
3.1.2	Modellierung der Schwabbelmassen mit Massenpunkten.	25
3.2	Kontaktprüfung und Reaktionskräfte	26
3.3	Gelenkwinkelbegrenzungen	27
3.4	Innere Drehmomente und Motorik	30
3.4.1	Steuerung des Niedersprungs eines dreigliedrigen ebenen Modells . .	31
3.4.2	Der Einsatz von Drehfedern zur Stabilisierung von Körperhaltungen	32
3.5	Allgemeine Ansätze zur Bewegungssteuerung	36
3.5.1	Interaktive Kontrolle	36
3.5.2	Fuzzy-Logik	36
3.5.3	Neuronale Netze	36
4	Absturzsimulationen	38
4.1	Kugelfallexperimente	38
4.2	Niedersprünge auf elastische Bohlen	50
4.3	Einfluß der Bohleneigenschaften auf die Stoßkräfte	64
4.4	Einfluß der Schwabbelmassen auf die Stoßkräfte	76
4.5	Untersuchungen zur dynamischen Belastbarkeit von Gerüstbohlen	78
4.5.1	Bohlenbelastung durch einen abstürzenden Menschen	78
4.5.2	Bohlenbelastung bei Kugelfallexperimenten	79
5	Anhang	86
	Literatur	99

1 Motivation und Ziele

Um die inneren Kräfte, die während einer Bewegung auf den Menschen wirken, zu bestimmen, werden in der Biomechanik zunehmend Computermodelle des menschlichen Körpers eingesetzt. Ausführlich wurden Bewegungsabläufe untersucht, die eine quasistatische Betrachtungsweise erlauben, wie zum Beispiel Stehen, langsames Gehen, Treppensteigen. Dabei sind zur Analyse der Belastungen, die bei solchen Bewegungen in den Gelenken auftreten, Modelle ausreichend, die aus einem skelettartigen Starrkörpersystem bestehen. In der biomechanischen Literatur findet sich folglich eine Vielzahl derartiger Modelle mit unterschiedlicher Anzahl von Teigliedern, die über ideale Gelenke miteinander verbunden sind (z.B. [Cappozzo, Leo, Pedotti, 1975], [Aleshinsky, Zatsiorsky, 1978], [Winter, 1984]). Aus geeigneten Lösungsansätzen, in die die gemessenen äußeren Kräfte sowie der aus Filmaufnahmen abgelesene Bewegungsablauf eingehen, können die in den Gelenken wirkenden Kräfte bestimmt werden (z.B. [Seireg, Arvikar, 1975]). Dieses Verfahren wird in der Orthopädie, Arbeitsmedizin oder Ergonomie oft eingesetzt, um hauptsächlich Fragestellungen, die die unteren Extremitäten betreffen, zu bearbeiten.

Im Gegensatz dazu gibt es nur wenige Autoren, die ihre Untersuchungen auf den Bereich der dynamischen Bewegungsabläufe, wie sie im Sport oder bei Unfällen auftreten, ausdehnen. Erwähnenswert sind die Arbeiten von Aleshinsky und Zatsiorsky [Aleshinsky, Zatsiorsky, 1978], welche mit einem räumlichen 15-gliedrigen Modell sogenannte „inverse Dynamik“ betreiben. Bei einem Athleten mit bekannten antropometrischen Daten werden verschiedene Bewegungsabläufe, wie zum Beispiel sportliches Gehen oder Sprint untersucht, wobei mit Kraftmeßplatten die äußeren Kräfte gemessen werden. Aus Filmaufnahmen werden die Koordinaten und Winkel ausgezeichneter Punkte gewonnen und durch Ableiten erhält man die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Mit aufwendigen Algorithmen können dann sukzessive Kräfte und Drehmomente für jeden Teilkörper berechnet werden. Allerdings können Aleshinsky und Zatsiorsky die Stoßbelastungen beim Auftreffen des Fußes auf dem Boden nicht bestimmen.

Ein ähnliches Modell mit 17 Segmenten und 21 Freiheitsgraden bei Bewegungen in der Sagittalebene wird von Hatze beschrieben [Hatze, 1981]. Simuliert wird damit die Absprungphase beim Weitsprung. Zusätzlich zum mechanischen Modell werden für die Motorik 46 Muskeln oder Muskelgruppen mitbetrachtet. Als Eingabedaten werden deshalb nicht nur antropometrische und aus der Filmanalyse gewonnene kinematische Größen, sondern auch neuromuskuläre Daten benötigt. Letztere werden unter großem Aufwand aus Elektromyogrammen (EMG) gewonnen. Abbildung 1 zeigt, daß die von Hatze durch umfangreiche Berechnungen ermittelten Bodenreaktionskraftkurven erst ab dem Zeitpunkt 0.019 s gut den gemessenen Verlauf der Bodenreaktionskraft wiedergeben. Die Kraft in den ersten 0.019 s wird von Hatze vernachlässigt. Genau in diesem Zeitabschnitt aber treten die für den Absprung entscheidenden Stoßbelastungen auf, die die höchsten Beschleunigungen am Körper bewirken.

Dieses Beispiel verdeutlicht das Problem der inversen Dynamik, die auf Eingabedaten aus der Filmanalyse angewiesen ist. Das Verfahren ist ungeeignet zur Simulation des Bewegungsablaufs während solcher Kraftstoßphasen. Selbst bei Hochgeschwindigkeitsfilmen mit typischerweise 300 Bilder/s ist die zeitliche Auflösung nicht ausreichend, so daß die Fehler bei der Berechnung der Beschleunigungen nach zweimaligem Differenzieren zu groß werden.

Nigg und Denoth [Nigg, Denoth, 1980], [Denoth, 1986] analysierten die Verläufe der äußeren Kräfte bei dynamischen Bewegungen. Beim Laufen, Hüpfen Springen zeigt der zeitliche Ablauf der Bodenreaktionskraft beim Auftreffen der Ferse immer eine Kraftspitze von weniger als 30 ms Dauer. Während dieser kurzen, sogenannten passiven Phase spielt die Motorik eine untergeordnete Rolle. Hier wird durch den Kraftstoß die Geschwindigkeit der auftreffenden Körperteile, zum Beispiel der Füße, in kürzester Zeit auf Null reduziert sowie die Einknickbewegung des Skeletts eingeleitet. Von entscheidender Bedeutung ist in dieser Phase die Zusammensetzung der Körpermasse aus Knochen und Weichteilen, wie Muskulatur, Fett- und Bindegewebe, Organe etc.. Die Knochen und Weichteile zeigen ein völlig unterschiedliches dynamisches Verhalten. Während die Knochen schlagartig abgebremst werden, führen die Weichteile stark gedämpfte Schwingungen aus, beziehungsweise „schwabbeln“ und besitzen damit einen längeren Bremsweg. Berücksichtigt man diese Tatsache nicht und modelliert so, daß die gesamte Körpermasse im Skelett lokalisiert ist, dann führen die Berechnungen für die Kräfte im Innern des Körpers während der Bewegung mit hohen Beschleunigungen zu völlig unrealistischen Werten. Es reicht also für diese Fälle nicht aus, ein Modell mit zwar vielen Gliedmaßen aber ohne Schwabbelmassen zu betrachten. Dies gilt in noch höherem Maße für die hohen Beschleunigungen bei Unfällen.

Ein realistisches Modell, welches Landungen im Sport oder bei Abstürzen simulieren soll, muß außerdem berücksichtigen, daß die Ferse oder andere Kontaktstellen zur Umwelt nicht unendlich starr sind und muß dafür geeignete Kraft-Deformations-Zusammenhänge bereitstellen.

Ein Ansatz, die Unzulänglichkeiten reiner „Skelettmodelle“ für Anwendungen in der Unfallsimulation zu überwinden, stammt von Huston und Zernicke

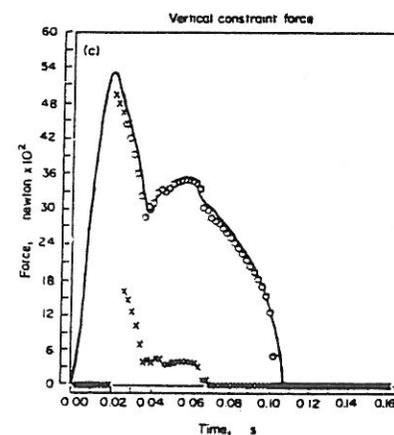


Abbildung 1: Zeitverlauf der vertikalen Bodenreaktionskraftkomponente bei einem Weitsprungsabsprung nach Hatze. Die durchgezogene Linie zeigt den gemessenen Verlauf. Die Symbole zeigen den simulierten Verlauf. Dabei gehören die Kreuze zur Ferse und die Kreise zur Summe von Ferse und Fußballen.

[Huston, Zernicke, 1981], die ein Modell mit 17 Gliedern und 38 Freiheitsgraden entwickelten. Es handelt sich dabei um ein Modell ohne Motorik, das speziell für kurze, starke Beschleunigungen entwickelt wurde. Der Modellansatz ist allerdings sehr weit von den realistischen Verhältnissen des menschlichen Körpers entfernt. Um die Eigenschaften der nicht starr an die Knochen gebundenen Weichteilmassen zu simulieren, verbinden Huston und Zernicke die Körperteile (z.B. Ober- und Unterschenkel) ihres Modells mit Federn und Dämpfern. Nun sind aber die Knochen, zum Beispiel in Knie und Hüfte, fester miteinander verbunden, als das Gewebe mit dem Knochen. Diese beiden unterschiedlichen Kopplungseigenschaften in einer einzigen zu vereinen, die die Verbindung zweier Gliedmaßen darstellen soll, ist ein schwieriges und unanschauliches Unterfangen.

Erstrebenswert zur Bearbeitung dynamischer Fragestellungen in der Biomechanik ist also ein Modell, das nicht auf die Vorgabe der Kinematik durch Filmaufnahmen angewiesen ist, und sich deshalb eignet, Bewegungen mit hohen Beschleunigungen und stoßartigen äußeren Kräften korrekt zu simulieren. Mit einem solchen Modell können eine Vielzahl von Themen in der Orthopädie, den Sportwissenschaften und der Unfallforschung bearbeitet werden. Um diese Lücke in der biomechanischen Modellbildung zu schließen, ist im „Lehr- und Forschungsbereich für Theoretische Astrophysik – Abteilung Biomechanik“ das Schwabbelmassenmodell entwickelt worden. Bei diesem Modell befindet sich eben nicht mehr die gesamte Körpermasse im Skelett, sondern zum großen Teil in den sogenannten Schwabbelmassen, die in Form von Starrkörpern oder Massenpunkten gedämpft und nichtlinear quasielastisch an die Knochen gekoppelt sind. Die Realitätsnähe dieses Ansatzes und seine Überlegenheit bei Bewegungen mit hohen Beschleunigungen, im Vergleich zu anderen Modellen, wurde bereits im Experiment durch Gruber [Gruber, 1987] nachgewiesen. In den Simulationsrechnungen mit diesem Modell werden die Bewegungsgleichungen mit Anfangsbedingungen numerisch integriert, das heißt, die Kinematik wird vom Programm selbst geliefert und muß nicht aus Filmanalysen ermittelt und dann als Input eingegeben werden. Durch Modifikation der Unterprogramme zur Berechnung äußerer Kräfte und der Steuerung der Motorik über innere Muskelmomente ist das Modell an spezielle Bewegungsabläufe anzupassen.

Inhalt dieser Arbeit ist

- die Verbesserung des vorhandenen dreigliedrigen ebenen Schwabbelmassenmodells im Detail (Algorithmen für Gelenkschläge und Bewegungssteuerung, Ankopplung der Schwabbelmassen),
- die Erstellung von SoftwareTools zur schnellen Erstellung abgewandelter und mit mehr Gliedmaßen ausgestatteter Modelle,
- die Schaffung der Voraussetzungen zur dreidimensionalen Erweiterung durch Schreiben eines Codegenerators für 3D-Bewegungsgleichungen,
- die Anwendung eines geeigneten Modells zur Simulation von Abstürzen auf Auffangvorrichtungen an Baugerüsten,
- die experimentelle Überprüfung des Modells.

Die Simulationen von Abstürzen auf Auffangvorrichtungen an Baugerüsten sind durchgeführt worden im Rahmen des Projekts „Optimierung von Auffangeinrichtungen / Biomechanische Beanspruchungsgrenzen des Menschen“ unter Federführung des „Fachausschuß persönliche Schutzausrüstung der Zentralstelle für Unfallverhütung und Arbeitsmedizin des Hauptverbandes der gewerblichen Berufsgenossenschaften e.V.“.

Das Ziel der Software-Entwicklung war die Realisierung eines Programmpaketes zur Bearbeitung von biomechanischen Fragestellungen mit Schwabbelmassen-Modellen. Dieses Paket sollte den Umfang des in Abbildung 2 dargestellten Konzepts besitzen.

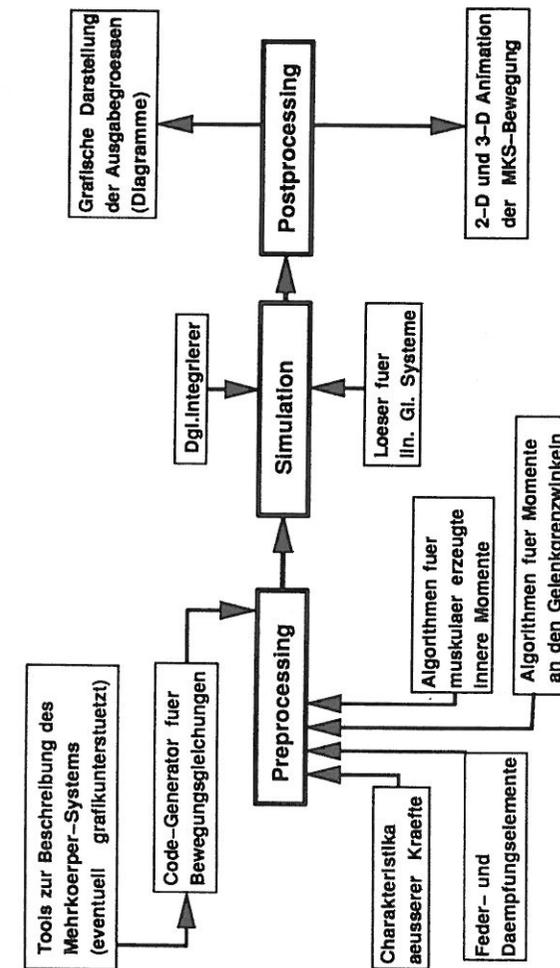


Abbildung 2: Software-Konzept für biomechanische Computer-Simulationen

2 Generierung der Bewegungsgleichungen

Das zentrale Problem bei der Simulation eines Mehrkörpersystems ist die Erzeugung der Bewegungsgleichungen. Sehr zeitraubend ist das Verfahren mit Bleistift und Papier, bei dem man auch schon bei Systemen mit relativ wenig Freiheitsgraden an Grenzen stößt. Dann werden nämlich die Gleichungsterme derart kompliziert, daß wegen der imens anwachsenden Zahl von Fehlermöglichkeiten kein Verlaß mehr auf die Korrektheit der Gleichungen ist. Außerdem ist es sehr lästig, wenn bei jeder kleinen Modifikation des Mehrkörpersystems sämtliche Gleichungen neu erstellt werden müssen. Daher ist es sinnvoll, den Aufwand zur Erstellung eines Programms zu treiben, welches die Bewegungsgleichungen automatisch erzeugt. Eine Reihe solcher Bewegungsgleichungsgeneratoren befindet sich auf dem Markt unter Namen wie *Adams*, *Dads*, *Simpack*, *Neweul*. Da diese entweder nicht zur Verfügung standen (zu teuer) oder für die Anforderungen in der Biomechanik nicht geeignet sind, wurde ein einfacher Bewegungsgleichungsgenerator unter dem Namen *bgg* selbst geschrieben.

2.1 Zwei Varianten des Newton-Euler Verfahrens

Variante 1

Der übliche Ansatz zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen und anschließender numerischer Integration ist folgender: In einem ersten Schritt werden die Bewegungsgleichungen für jeden einzelnen Starrkörper so formuliert, als ob er keinen Zwängen unterläge. Jeder Starrkörper besitzt nun sechs Freiheitsgrade, wovon drei auf die Translation und drei auf die Rotation entfallen. Entsprechend dieser Zahl von Freiheitsgraden ergeben sich sechs Bewegungsgleichungen: Die drei Newtonschen Gleichungen beschreiben die Translation des Massenschwerpunkts, während die Eulerschen Gleichungen die Rotation des Körpers um den Schwerpunkt beschreiben. In einem Mehrkörpersystem liefern die n Segmente also $6n$ Bewegungsgleichungen. Beim Zusammenfügen der Segmente zu einem gekoppelten System werden die zunächst unbekanntes Zwangskräfte und deren Drehmomente, welche die Kopplung zwischen den einzelnen Starrkörpern erwirken, zu den äußeren Kräften und Drehmomenten addiert. Zusätzlich ergeben m Zwangsbedingungen zweimal nach der Zeit differenziert m weitere Gleichungen, so daß ein exakt bestimmtes Gleichungssystem von $6n + m$ Gleichungen entsteht. Unbekannte Größen sind in diesem Fall die Beschleunigungen der Starrkörperkoordinaten und die Komponenten der Zwangskräfte. Die Koordinaten selbst und deren Geschwindigkeiten sind aus den Anfangsbedingungen bekannt.

In einem zweiten Schritt werden die Komponenten der Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen mit Hilfe der üblichen Prozeduren für Zeilen- und Spaltenmanipulationen linearer Gleichungssysteme eliminiert. Da die Anzahl der Zwangskraftkomponenten m ist, reduziert sich das Gleichungssystem auf einen Satz von $6n$ Gleichungen. Außerdem werden mittels der m Zwangsbedingungen die $6n$ Koordinaten der Starrkörper mitsamt ihren Ableitungen ersetzt durch $6n - m$ generalisierte Koordinaten des Systems ($q_1 \dots q_{6n-m}$) und deren Ableitungen. Die Anzahl der generalisierten Koordinaten $f = 6n - m$ entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i(q_1 \dots q_f)} & \dot{x}_i &= \dot{x}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f)} & \ddot{x}_i &= \ddot{x}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f, \ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_f)} \\ y_i &= y_{i(q_1 \dots q_f)} & \dot{y}_i &= \dot{y}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f)} & \ddot{y}_i &= \ddot{y}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f, \ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_f)} \\ z_i &= z_{i(q_1 \dots q_f)} & \dot{z}_i &= \dot{z}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f)} & \ddot{z}_i &= \ddot{z}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f, \ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_f)} \\ \alpha_i &= \alpha_{i(q_1 \dots q_f)} & \dot{\alpha}_i &= \dot{\alpha}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f)} & \ddot{\alpha}_i &= \ddot{\alpha}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f, \ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_f)} \\ \beta_i &= \beta_{i(q_1 \dots q_f)} & \dot{\beta}_i &= \dot{\beta}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f)} & \ddot{\beta}_i &= \ddot{\beta}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f, \ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_f)} \\ \gamma_i &= \gamma_{i(q_1 \dots q_f)} & \dot{\gamma}_i &= \dot{\gamma}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f)} & \ddot{\gamma}_i &= \ddot{\gamma}_{i(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f, \ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_f)} \end{aligned}$$

Dadurch wird das Gleichungssystem um weitere m Gleichungen reduziert. Letztendlich führt das ganze Verfahren also auf $6n - m$ Gleichungen mit $6n - m$ Unbekannten. Die Unbekannten sind jetzt die zweifachen zeitlichen Ableitungen der generalisierten Koordinaten. Das Gleichungssystem ist wieder exakt bestimmt. Bis hier ist das Verfahren rein symbolisch. Nun wird das Gleichungssystem numerisch gelöst und die als Lösung erhaltenen Beschleunigungen der generalisierten Koordinaten einem numerischen Differentialgleichungsintegrator zur Verfügung gestellt, der dann die $6n - m$ Bewegungsgleichungen integriert.

In diesem Verfahren treten sehr ernste Probleme bei der symbolischen Formelmanipulation auf. Während der symbolischen Eliminierung der Zwangskraftkomponenten und der Ersetzung der Starrkörperkoordinaten durch generalisierte Koordinaten entstehen riesige algebraische Terme. Bei einer größeren Anzahl von Freiheitsgraden (> 30) überfordert die Größe dieser Terme die Möglichkeiten von symbolischen Formelmanipulationsprogrammen. Darüberhinaus erreicht der erzeugte Quell-Code Dimensionen die kaum noch zu handhaben sind.

Diese Probleme können vermieden werden, wenn man eine Methode benutzt, die zwar die Lösung eines Systems mit mehr Gleichungen erfordert, dabei aber die einzelnen Gleichungen von sehr viel einfacherer Art sind:

Variante 2

Der erste Schritt ist derselbe wie beim vorherigen Verfahren. Das lineare Gleichungssystem am Ende dieses Schrittes besteht aus $6n + m$ Gleichungen ($6n$ Bewegungsgleichungen und m zweifach differenzierten Zwangsbedingungen) mit ebensoviele Unbekannten. Nun ist es möglich das Gleichungssystem bereits in diesem Stadium zu lösen und man erhält als Lösung die Beschleunigungen der Starrkörperkoordinaten und zusätzlich noch die Komponenten der Zwangskräfte. Die Beschleunigungen werden wieder einem numerischen Differentialgleichungsintegrator übergeben und die $6n$ Bewegungsgleichungen integriert. Die Bewegungsgleichungen sind in diesem Fall Gleichungen in Starrkörperkoordinaten und nicht wie vorhin in generalisierten Koordinaten.

Wendet man diese zweite Methode an, müssen also $6n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung integriert werden anstatt $6n - m$ beim ersten Ansatz. Desweiteren muß bei jedem Integrationsschritt ein System von $6n + m$ linearen Gleichungen gelöst werden im Vergleich zu $6n - m$ im anderen Fall. Die einzelnen Terme der Gleichungen sind jedoch sehr simpel und können daher problemlos automatisch generiert werden. Trotz der erhöhten Anzahl von Gleichungen kann dabei die CPU-Zeit für einen Simulationslauf wegen der stark vereinfachten Terme sogar abnehmen.

Als weiterer Vorteil dieses Verfahrens ergeben sich die Zwangskräfte unmittelbar während der Simulation als Teil des Lösungsvektors des linearen Gleichungssystems. Um die Belastung einer mechanischen Struktur zu beurteilen, sind die Zwangskräfte in

vielen Fällen von Interesse. Bei Verwendung von generalisierten Koordinaten müssen die Komponenten der Zwangskräfte nachträglich in einer etwas umständlichen Prozedur aus den Simulationsergebnissen berechnet werden, indem man alle übrigen am jeweiligen Starrkörper i wirkenden Kräfte von dessen Trägheitskraft $m_i \ddot{x}_i$ subtrahiert.

Ein Vorzug generalisierter Koordinaten ist allerdings, daß sie die Erfüllung der Zwangsbedingungen implizieren, das heißt, jeder beliebige Satz von generalisierten Koordinaten beschreibt das System so, daß die Zwangsbedingungen nicht verletzt sind. Rechnet man hingegen in vollständigen Starrkörperkoordinaten, so können im Zuge numerischer Ungenauigkeiten bei der Integration der Bewegungsgleichungen leichte Verletzungen der Zwangsbedingungen auftreten. Diese liegen aber bei Anwendungen wie sie in dieser Arbeit noch vorgestellt werden in Größenordnungen $< 10^{-6}m$ und sind damit bedeutungslos.

Die Prozedur von Aufstellung und Lösung der Bewegungsgleichungen gemäß der zweiten Variante ist im folgenden noch einmal schematisiert dargestellt.

Schema zur Aufstellung und numerischen Integration der Bewegungsgleichungen mit modifiziertem Newton-Euler Verfahren

Mehrkörpersystem mit n Körpern und m Zwangsbedingungen

1.) Aufstellung der Newtongleichungen ($\dot{P} = F$)	3n Diffgl.
2.) Aufstellung der Eulergleichungen ($\dot{L} = M$)	3n Diffgl.
Simultan zu integrierende Bewegungsgleichungen	6n Diffgl.
3.) Zweifaches Differenzieren der Zwangsbedingungen nach der Zeit	m Diffgl.
4.) Einsetzen der Anfangsbedingungen in die Gleichungen aus 1.), 2.) und 3.) ergibt ein lineares Gleichungssystem	6n+m lin. Gln.
5.) Numerisches Lösen des linearen Gleichungssystems (6n + m Gleichungen) liefert Beschleunigungen und Zwangskräfte.	
6.) Die Beschleunigungen werden einem numerischen Integrationsprogramm zur Verfügung gestellt und die 6n Bewegungsgleichungen integriert.	

Alternativ zum Newton-Euler Verfahren können die Bewegungsgleichungen nach dem Lagrange-Formalismus aufgestellt werden. Sie lauten dann für konservative Systeme, wenn sich also alle Kräfte aus einem Potential ableiten lassen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta L}{\delta q_i} = 0 \quad (1)$$

mit der Lagrange-Funktion L , die sich ergibt als Differenz der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V des Systems ($L = T - V$). Die q_i sind die verallgemeinerten Koordinaten des Systems.

Im nichtkonservativen Fall lauten die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_i} = \Phi_i \quad (2)$$

mit den generalisierten Kräften Φ_i , die über die am System mit n Freiheitsgraden geleistete Arbeit W definiert sind:

$$dW = \sum_{i=1}^n \Phi_i dq_i \quad (3)$$

Der Lagrange-Formalismus liefert letzten Endes dieselben Gleichungen wie das Newton-Euler-Verfahren mit generalisierten Koordinaten. Das bedeutet, daß bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden ebenfalls riesige Terme und dieselben damit zusammenhängenden Probleme auftreten.

2.2 Der Bewegungsgleichungsgenerator bgg

Bgg arbeitet nach der unter 2.1 beschriebenen zweiten Variante des Newton-Euler-Verfahrens und erzeugt die Bewegungsgleichungen in Fortran- oder C-Code. Beim momentanen Entwicklungsstand ist es damit möglich dreidimensionale Mehrkörpersysteme zu simulieren, deren Glieder durch Kugelgelenke verbunden sind. Außerdem existiert eine vereinfachte Version für zweidimensionale Bewegungen.

Die Art und Weise, wie bgg Gleichungen erzeugt, wird beispielhaft an dem in Abbildung 3 gezeigten 5-gliedrigen Mehrkörpersystem erläutert. Die Konventionen betreffs der Nummerierung der Gelenke sowie der Indizierung der Verbindungsvektoren r_{ij} sind im Anhang erklärt.

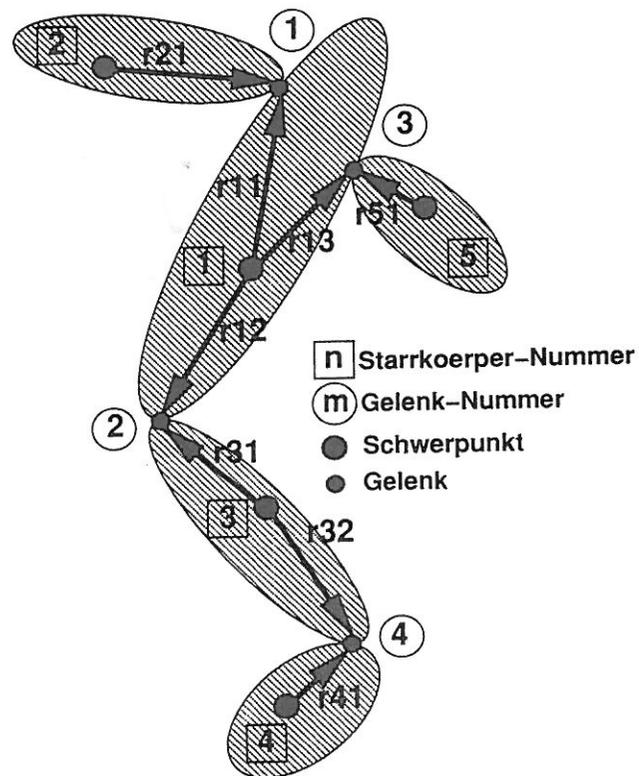


Abbildung 3: Fünfgliedriges Mehrkörpersystem.

2.2.1 Aufstellung der Newtonschen Gleichungen

Faßt man sämtliche Kräfte, die an den Starrkörpern angreifen und keine Zwangskräfte sind, zu einer Resultierenden K_i pro Körper zusammen, so lauten die Newtonschen Gleichungen:

$$m_1 \ddot{x}_1 = +Z_{1x} + Z_{2x} + Z_{3x} + K_{1x} \quad (4)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = +Z_{1y} + Z_{2y} + Z_{3y} + K_{1y} \quad (5)$$

$$m_1 \ddot{z}_1 = +Z_{1z} + Z_{2z} + Z_{3z} + K_{1z} \quad (6)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -Z_{1x} + K_{2x} \quad (7)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -Z_{1y} + K_{2y} \quad (8)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = -Z_{1z} + K_{2z} \quad (9)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = -Z_{2x} + Z_{4x} + K_{3x} \quad (10)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 = -Z_{2y} + Z_{4y} + K_{3y} \quad (11)$$

$$m_3 \ddot{z}_3 = -Z_{2z} + Z_{4z} + K_{3z} \quad (12)$$

$$m_4 \ddot{x}_4 = -Z_{4x} + K_{4x} \quad (13)$$

$$m_4 \ddot{y}_4 = -Z_{4y} + K_{4y} \quad (14)$$

$$m_4 \ddot{z}_4 = -Z_{4z} + K_{4z} \quad (15)$$

$$m_5 \ddot{x}_5 = -Z_{3x} + K_{5x} \quad (16)$$

$$m_5 \ddot{y}_5 = -Z_{3y} + K_{5y} \quad (17)$$

$$m_5 \ddot{z}_5 = -Z_{3z} + K_{5z} \quad (18)$$

dabei sind:

- m_i : Masse des Starrkörpers i
- x_i, y_i, z_i : Schwerpunktskoordinaten des Starrkörpers i
- Z_{jx}, Z_{jy}, Z_{jz} : Komponenten der Zwangskräfte im Gelenk j
- K_{ix}, K_{iy}, K_{iz} : Komponenten der resultierenden äußeren Kraft am Starrkörper i

Bei diesen Gleichungen ist schon berücksichtigt, daß die Zwangskräfte in den Gelenken gemäß *actio = reactio* auf beide angrenzende Starrkörper mit unterschiedlichem Vorzeichen wirken. Die Konvention zu den Vorzeichen der Zwangskraftkomponenten ist ebenfalls im Anhang erklärt.

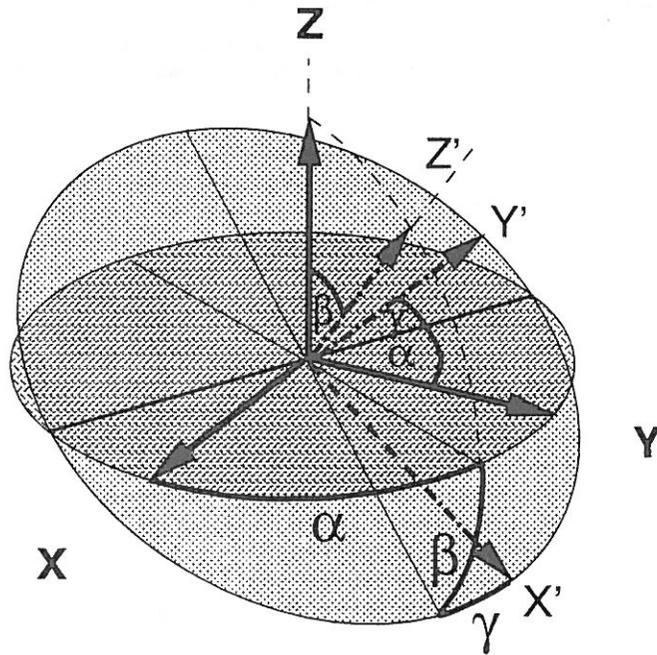


Abbildung 4: Von bgg verwendete Eulerwinkel.

2.2.2 Aufstellung der Eulerschen Gleichungen

Zur Beschreibung der Orientierung eines Starrkörpers im Raum werden von bgg die Eulerwinkel α , β , γ entsprechend Abbildung 4 benutzt.

Mit diesen Eulerwinkeln lautet die Rotationsmatrix \underline{D} zur Transformation der raumfesten Koordinaten eines Vektors in Koordinaten des Hauptträgheitsachsensystems des Starrkörpers ($\mathbf{r}' = \underline{D} \mathbf{r}$):

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (19)$$

Die umgekehrte Transformation von körperfesten in raumfeste Koordinaten geschieht mittels der transponierten Rotationsmatrix: $\mathbf{r} = \underline{D}^T \mathbf{r}'$.

Die Eulerschen Kreisgleichungen beschreiben die Rotationsbewegungen der Starrkörper um ihre Schwerpunkte. Zweckmäßigerweise verwendet man zur Beschreibung der Drehbewegung eines Starrkörpers dessen Hauptträgheitsachsensystem mit den Achsen ξ , η

und ζ . Bezeichnet man die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit bezüglich der Hauptträgheitsachsen ω_ξ , ω_η , ω_ζ nach Euler mit p , q und r , so lauten die Eulerschen Kreisgleichungen:

$$\frac{dL_\xi}{dt} = \theta_\xi \dot{p} + q r (\theta_\zeta - \theta_\eta) = M_\xi \quad (20)$$

$$\frac{dL_\eta}{dt} = \theta_\eta \dot{q} + p r (\theta_\xi - \theta_\zeta) = M_\eta \quad (21)$$

$$\frac{dL_\zeta}{dt} = \theta_\zeta \dot{r} + p q (\theta_\eta - \theta_\xi) = M_\zeta \quad (22)$$

Mit

- L_ξ, L_η, L_ζ : Drehimpulskomponenten im Hauptträgheitsachsensystem
- $\theta_\xi, \theta_\eta, \theta_\zeta$: Hauptträgheitsmomente
- M_ξ, M_η, M_ζ : Drehmomentkomponenten im Hauptträgheitsachsensystem

Analog zu den Newtonschen Gleichungen werden nun sämtliche Momente, die nicht von den Zwangskräften verursacht sind, zu einem resultierenden Moment zusammengefaßt. Die Drehmomente der Zwangskräfte müssen mit Hilfe der Hebelarme r_{ij} (Verbindungsvektoren zwischen den Schwerpunkten und den Gelenken) berechnet werden. Die Eulerschen Gleichungen werden von bgg im Gegensatz zu den Newtonschen Gleichungen in Koordinaten der Hauptträgheitsachsensysteme der jeweiligen Starrkörper formuliert. Deshalb müssen die Drehmomente der Zwangskräfte zusätzlich mittels der Rotationsmatrix \underline{D} transformiert werden.

Die Eulerschen Gleichungen für das fünfgliedrige Beispiel lauten dann:

$$\theta_{1\xi} \dot{p}_1 + q_1 r_{1\xi} (\theta_{1\zeta} - \theta_{1\eta}) = r_{11\xi} (Z_{1x} e_{131} + Z_{1y} e_{132} + Z_{1z} e_{133}) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & -r_{11\zeta} (Z_{1x} e_{121} + Z_{1y} e_{122} + Z_{1z} e_{123}) \\ & + r_{12\xi} (Z_{2x} e_{131} + Z_{2y} e_{132} + Z_{2z} e_{133}) \\ & - r_{12\zeta} (Z_{2x} e_{121} + Z_{2y} e_{122} + Z_{2z} e_{123}) \\ & + r_{13\xi} (Z_{3x} e_{131} + Z_{3y} e_{132} + Z_{3z} e_{133}) \\ & - r_{13\zeta} (Z_{3x} e_{121} + Z_{3y} e_{122} + Z_{3z} e_{123}) + M_{1\xi} \end{aligned}$$

$$\theta_{1\eta} \dot{q}_1 + p_1 r_{1\eta} (\theta_{1\xi} - \theta_{1\zeta}) = r_{11\eta} (Z_{1x} e_{111} + Z_{1y} e_{112} + Z_{1z} e_{113}) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & -r_{11\xi} (Z_{1x} e_{131} + Z_{1y} e_{132} + Z_{1z} e_{133}) \\ & + r_{12\eta} (Z_{2x} e_{111} + Z_{2y} e_{112} + Z_{2z} e_{113}) \\ & - r_{12\xi} (Z_{2x} e_{131} + Z_{2y} e_{132} + Z_{2z} e_{133}) \\ & + r_{13\eta} (Z_{3x} e_{111} + Z_{3y} e_{112} + Z_{3z} e_{113}) \\ & - r_{13\xi} (Z_{3x} e_{131} + Z_{3y} e_{132} + Z_{3z} e_{133}) + M_{1\eta} \end{aligned}$$

$$\theta_{1\zeta} \dot{r}_1 + p_1 q_1 (\theta_{1\eta} - \theta_{1\xi}) = r_{11\zeta} (Z_{1x} e_{121} + Z_{1y} e_{122} + Z_{1z} e_{123}) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & -r_{11\eta} (Z_{1x} e_{111} + Z_{1y} e_{112} + Z_{1z} e_{113}) \\ & + r_{12\zeta} (Z_{2x} e_{121} + Z_{2y} e_{122} + Z_{2z} e_{123}) \\ & - r_{12\eta} (Z_{2x} e_{111} + Z_{2y} e_{112} + Z_{2z} e_{113}) \\ & + r_{13\zeta} (Z_{3x} e_{121} + Z_{3y} e_{122} + Z_{3z} e_{123}) \\ & - r_{13\eta} (Z_{3x} e_{111} + Z_{3y} e_{112} + Z_{3z} e_{113}) + M_{1\zeta} \end{aligned}$$

$$\theta_{2\zeta}\dot{p}_2 + q_2r_2(\theta_{2\zeta} - \theta_{2\eta}) = -r_{21\eta}(Z_{1x}e_{231} + Z_{1y}e_{232} + Z_{1z}e_{233}) + r_{21\zeta}(Z_{1x}e_{221} + Z_{1y}e_{222} + Z_{1z}e_{223}) + M_{2\zeta} \quad (26)$$

$$\theta_{2\eta}\dot{q}_2 + p_2r_2(\theta_{2\zeta} - \theta_{2\zeta}) = -r_{21\zeta}(Z_{1x}e_{211} + Z_{1y}e_{212} + Z_{1z}e_{213}) + r_{21\eta}(Z_{1x}e_{231} + Z_{1y}e_{232} + Z_{1z}e_{233}) + M_{2\eta} \quad (27)$$

$$\theta_{2\zeta}\dot{r}_2 + p_2q_2(\theta_{2\eta} - \theta_{2\zeta}) = -r_{21\eta}(Z_{1x}e_{221} + Z_{1y}e_{222} + Z_{1z}e_{223}) + r_{21\zeta}(Z_{1x}e_{211} + Z_{1y}e_{212} + Z_{1z}e_{213}) + M_{2\zeta} \quad (28)$$

$$\theta_{3\zeta}\dot{p}_3 + q_3r_3(\theta_{3\zeta} - \theta_{3\eta}) = -r_{31\eta}(Z_{3x}e_{331} + Z_{3y}e_{332} + Z_{3z}e_{333}) + r_{31\zeta}(Z_{3x}e_{321} + Z_{3y}e_{322} + Z_{3z}e_{323}) + r_{32\eta}(Z_{4x}e_{331} + Z_{4y}e_{332} + Z_{4z}e_{333}) - r_{32\zeta}(Z_{4x}e_{321} + Z_{4y}e_{322} + Z_{4z}e_{323}) + M_{3\zeta} \quad (29)$$

$$\theta_{3\eta}\dot{q}_3 + p_3r_3(\theta_{3\zeta} - \theta_{3\zeta}) = -r_{31\zeta}(Z_{3x}e_{311} + Z_{3y}e_{312} + Z_{3z}e_{313}) + r_{31\eta}(Z_{3x}e_{331} + Z_{3y}e_{332} + Z_{3z}e_{333}) + r_{32\zeta}(Z_{4x}e_{311} + Z_{4y}e_{312} + Z_{4z}e_{313}) - r_{32\eta}(Z_{4x}e_{331} + Z_{4y}e_{332} + Z_{4z}e_{333}) + M_{3\eta} \quad (30)$$

$$\theta_{3\zeta}\dot{r}_3 + p_3q_3(\theta_{3\eta} - \theta_{3\zeta}) = -r_{31\eta}(Z_{3x}e_{321} + Z_{3y}e_{322} + Z_{3z}e_{323}) + r_{31\zeta}(Z_{3x}e_{311} + Z_{3y}e_{312} + Z_{3z}e_{313}) + r_{32\eta}(Z_{4x}e_{321} + Z_{4y}e_{322} + Z_{4z}e_{323}) - r_{32\zeta}(Z_{4x}e_{311} + Z_{4y}e_{312} + Z_{4z}e_{313}) + M_{3\zeta} \quad (31)$$

$$\theta_{4\zeta}\dot{p}_4 + q_4r_4(\theta_{4\zeta} - \theta_{4\eta}) = -r_{41\eta}(Z_{4x}e_{431} + Z_{4y}e_{432} + Z_{4z}e_{433}) + r_{41\zeta}(Z_{4x}e_{421} + Z_{4y}e_{422} + Z_{4z}e_{423}) + M_{4\zeta} \quad (32)$$

$$\theta_{4\eta}\dot{q}_4 + p_4r_4(\theta_{4\zeta} - \theta_{4\zeta}) = -r_{41\zeta}(Z_{4x}e_{411} + Z_{4y}e_{412} + Z_{4z}e_{413}) + r_{41\eta}(Z_{4x}e_{431} + Z_{4y}e_{432} + Z_{4z}e_{433}) + M_{4\eta} \quad (33)$$

$$\theta_{4\zeta}\dot{r}_4 + p_4q_4(\theta_{4\eta} - \theta_{4\zeta}) = -r_{41\eta}(Z_{4x}e_{421} + Z_{4y}e_{422} + Z_{4z}e_{423}) + r_{41\zeta}(Z_{4x}e_{411} + Z_{4y}e_{412} + Z_{4z}e_{413}) + M_{4\zeta} \quad (34)$$

$$\theta_{5\zeta}\dot{p}_5 + q_5r_5(\theta_{5\zeta} - \theta_{5\eta}) = -r_{51\eta}(Z_{5x}e_{531} + Z_{5y}e_{532} + Z_{5z}e_{533}) + r_{51\zeta}(Z_{5x}e_{521} + Z_{5y}e_{522} + Z_{5z}e_{523}) + M_{5\zeta} \quad (35)$$

$$\theta_{5\eta}\dot{q}_5 + p_5r_5(\theta_{5\zeta} - \theta_{5\zeta}) = -r_{51\zeta}(Z_{5x}e_{511} + Z_{5y}e_{512} + Z_{5z}e_{513}) + r_{51\eta}(Z_{5x}e_{531} + Z_{5y}e_{532} + Z_{5z}e_{533}) + M_{5\eta} \quad (36)$$

$$\theta_{5\zeta}\dot{r}_5 + p_5q_5(\theta_{5\eta} - \theta_{5\zeta}) = -r_{51\eta}(Z_{5x}e_{521} + Z_{5y}e_{522} + Z_{5z}e_{523}) + r_{51\zeta}(Z_{5x}e_{511} + Z_{5y}e_{512} + Z_{5z}e_{513}) + M_{5\zeta} \quad (37)$$

dabei sind:

- $\theta_{i\zeta}, \theta_{i\eta}, \theta_{i\zeta}$: Trägheitsmomente bzgl. der Hauptträgheitsachsen ξ, η, ζ des Starrkörpers i .
- p_i, q_i, r_i : Komponenten der Winkelgeschwindigkeit ω_i des Starrkörpers i bzgl. dessen Hauptträgheitsachsen.
- $r_{ij\zeta}, r_{ij\eta}, r_{ij\zeta}$: Komponenten der Verbindungsvektoren vom Schwerpunkt des Starrkörpers i zu den j angrenzenden Gelenken
- $e_{i11} \dots e_{i33}$: Elemente der Rotationsmatrix des Starrkörpers i
- $M_{i\zeta}, M_{i\eta}, M_{i\zeta}$: Komponenten des resultierenden äußeren Drehmoments am Starrkörper i

Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit ω und deren zeitliche Ableitungen können mit Hilfe der Eulerwinkel dargestellt werden. Diese Abhängigkeiten sind dem Anhang, sowohl für das körperfeste System ($p = \omega_\xi, q = \omega_\eta, r = \omega_\zeta, \dot{p} = \dot{\omega}_\xi, \dot{q} = \dot{\omega}_\eta, \dot{r} = \dot{\omega}_\zeta$), als auch für das raumfeste System ($\omega_x, \omega_y, \omega_z, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$), zu entnehmen.

Einsetzen der Ausdrücke von $\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$, für $p, q, r, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ in die Eulergleichungen liefert zusammen mit den Newtonschen Gleichungen 30 Gleichungen mit den 42 Unbekannten $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i, \ddot{\alpha}_i, \ddot{\beta}_i, \ddot{\gamma}_i$ ($i = 1 \dots 5$) und Z_{jx}, Z_{jy}, Z_{jz} ($j = 1 \dots 4$).

2.2.3 Die Zwangsbedingungen

Die fehlenden zwölf Gleichungen liefern die vier Gelenke, von denen jedes drei Zwangsbedingungen erzeugt. Bei einem Kugelgelenk, das die Körper mit den Nummern i und j verbindet muß gelten (siehe Abbildung 5):

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{R}_n \Leftrightarrow \mathbf{r}_{0m} + \mathbf{r}_m = \mathbf{r}_{0n} + \mathbf{r}_n \quad (38)$$

dabei sind:

- $\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n$: Vektoren vom Ursprung des raumfesten System zu den Positionen des Kugelgelenks am Körper m und am Körper n
- $\mathbf{r}_{0m}, \mathbf{r}_{0n}$: Vektoren vom Ursprung des raumfesten Systems zu den Schwerpunkten der Körper m und n
- $\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n$: Vektoren von den Schwerpunkten der Körper m und n zum Gelenk.

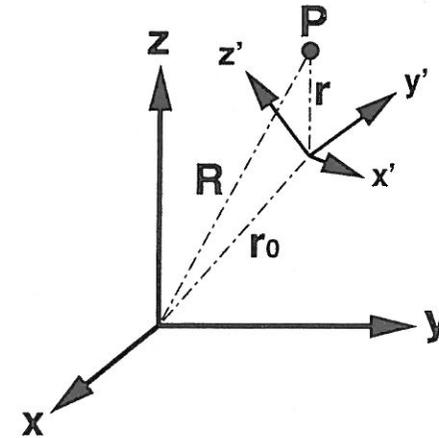


Abbildung 5: Lagebeschreibung eines Punktes P im bewegten Bezugssystem $x'y'z'$.

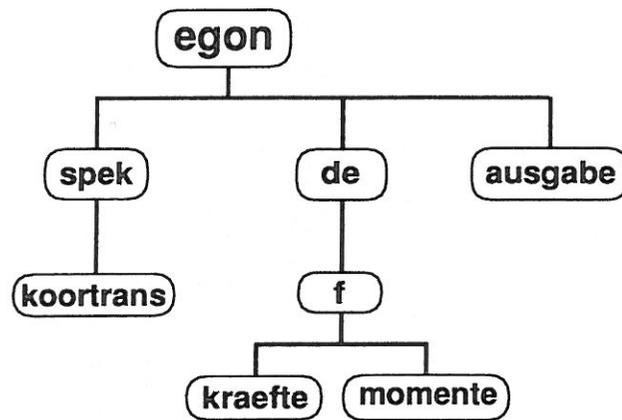


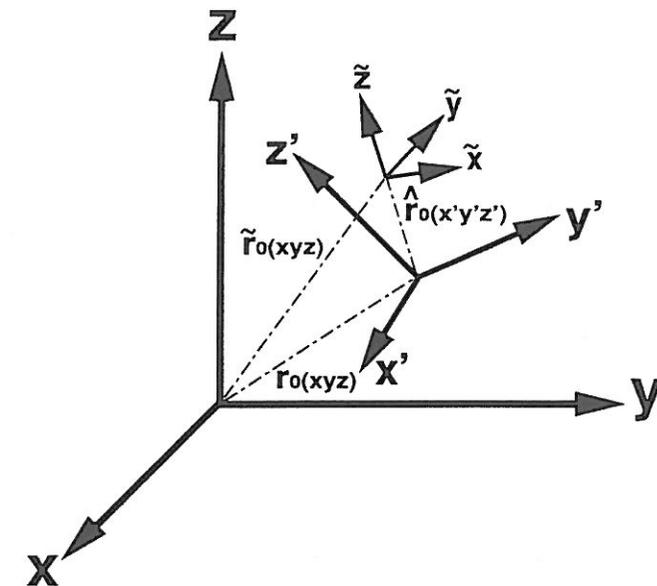
Abbildung 7: Programmumgebung von bgg-3D.

Der Fortran-Code für **A** und **b** des Beispiels wurde von *bgg* auf einer „VAXstation 3100“ in 3.02 s CPU-Zeit erzeugt und ist im Anhang abgedruckt.

Um die von *bgg* erzeugten Gleichungen ohne viel Mühe integrieren zu können, wurde dafür eine Fortran-Umgebung geschaffen, in die der erzeugte Code ohne weiteres eingefügt werden kann und in welcher die von *bgg* vorgegebene Nomenklatur berücksichtigt ist. Diese Umgebung hat folgende Struktur (vgl. Abbildung 7):

Im Hauptprogramm *egon* wird aus den Eingabedateien *koebau* und *anfbed* gelesen. *Koebau* enthält die Daten über die Struktur des Mehrkörpersystems (beim menschlichen Körper gewissermaßen den Körperbau), also die Hebelarme $r_{ij, n, \theta}$ sowie die Massen m_i und die Trägheitsmomente $\theta_{i, n, \theta}$. Die Datei *anfbed* enthält als Anfangsbedingungen eine den Freiheitsgraden des Systems entsprechende Anzahl von Koordinaten und Geschwindigkeiten. Die Anfangsbedingungen werden also, um Verletzungen der Zwangsbedingungen durch inkonsistente Anfangsbedingungen zu vermeiden als ein Satz generalisierter Koordinaten und nicht als ein Satz vollständiger Koordinaten eingegeben. Das Unterprogramm *spek* erzeugt dann aus den Anfangsbedingungen in generalisierten Koordinaten solche in vollständigen Koordinaten, die auf jeden Fall mit den Zwangsbedingungen verträglich sind.

Dabei kann es vorkommen, daß die Lage eines Starrkörpers nicht bezüglich dem raumfesten System (in absoluten Koordinaten) beschrieben ist, sondern bezüglich dem Hauptträgheitsachsensystem eines anderen Starrkörpers (in relativen Koordinaten). Zur Umrechnung dieser relativen Koordinaten in absolute Koordinaten dient das Unterprogramm *koortrans*. Es können die absoluten Koordinaten von n Starrkörpern, sowie die darauf bezogenen relativen Koordinaten von weiteren n Starrkörpern übergeben werden.

Abbildung 8: Körperfestes System $x'y'z'$ und das relativ dazu beschriebene System $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$.

Koortrans erzeugt dann für diesen zweiten Satz von Starrkörpern die absoluten Koordinaten. Ausgeführt wird also die Umformung *absolut, relativ* \rightarrow *absolut*. In einem zweiten Modus kann mit *koortrans* aber auch die Umformung *absolut, absolut* \rightarrow *relativ* gemacht werden. Das heißt, aus zweimal n absoluten Starrkörperkoordinatensätzen werden n relative erzeugt.

Dieselben Transformationen werden außerdem noch für die Geschwindigkeiten durchgeführt.

Die Transformation der kartesischen Koordinaten x, y und z der Aufpunktvektoren $\mathbf{r}_0, \hat{\mathbf{r}}_0, \tilde{\mathbf{r}}_0$ geschieht einfach durch Addition der relativen zu den absoluten Werten ($\tilde{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{r}}_0$) beziehungsweise im zweiten Modus durch Subtraktion der beiden absoluten Werte ($\hat{\mathbf{r}}_0 = \tilde{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{r}_0$). Für die Eulerwinkel ist die Transformation etwas verwickelter und geht für den Fall *absolut, relativ* \rightarrow *absolut* folgendermaßen vorstatten:

Bekannt sind:

α', β', γ' : Eulerwinkel von x', y', z' bzgl. x, y, z

$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$: Eulerwinkel von $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ bzgl. x', y', z'

Gesucht sind:

$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$: Eulerwinkel von $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ bzgl. x, y, z

Außerdem seien:

\underline{D}' : Rotationsmatrix $x, y, z \rightarrow x', y', z'$
mit den Elementen $e'_{11} \dots e'_{33}$

\underline{D} : Rotationsmatrix $x, y, z \rightarrow \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$
mit den Elementen $\tilde{e}_{11} \dots \tilde{e}_{33}$

$\underline{\hat{D}}$: Rotationsmatrix $x', y', z' \rightarrow \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$
mit den Elementen $\hat{e}_{11} \dots \hat{e}_{33}$

Dann ist:

$$\underline{\hat{D}} = \underline{\hat{D}} \underline{D}' \quad (46)$$

Aus den Elementen von $\underline{\hat{D}}$ können sukzessive die gesuchten Eulerwinkel bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \arccos(\hat{e}_{31}e'_{13} + \hat{e}_{32}e'_{23} + \hat{e}_{33}e'_{33}) \\ \tilde{\alpha} &= \arcsin \left[(\hat{e}_{31}e'_{12} + \hat{e}_{32}e'_{22} + \hat{e}_{33}e'_{32}) \frac{1}{\sin \tilde{\beta}} \right] \\ \tilde{\gamma} &= \arcsin \left[(\hat{e}_{21}e'_{13} + \hat{e}_{22}e'_{23} + \hat{e}_{23}e'_{33}) \frac{1}{\sin \tilde{\beta}} \right] \\ \dot{\tilde{\beta}} &= -(\hat{e}_{31}e'_{13} + \hat{e}_{32}e'_{23} + \hat{e}_{33}e'_{33}) \frac{1}{\sin \tilde{\beta}} \\ \dot{\tilde{\alpha}} &= (\hat{e}_{31}e'_{12} + \hat{e}_{32}e'_{22} + \hat{e}_{33}e'_{32}) \frac{1}{\cos \tilde{\alpha} \sin \tilde{\beta}} \\ \dot{\tilde{\gamma}} &= (\hat{e}_{21}e'_{13} + \hat{e}_{22}e'_{23} + \hat{e}_{23}e'_{33}) \frac{1}{\sin \tilde{\beta} \cos \tilde{\gamma}} \end{aligned}$$

Die Zweideutigkeit des Arcussinus und des Arcuscosinus wird beseitigt, indem der Vektor $(0, 0, 1)$ im System $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ einmal mit Hilfe der gefundenen Eulerwinkel $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ in das System xyz zurücktransformiert wird und zum andern mit $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ zunächst nach $x'y'z'$ und dann mit α', β', γ' wiederum nach xyz transformiert wird. Stimmen die Ergebnisse der einstufigen und der zweistufigen Rücktransformation nicht überein, ist der jeweils andere in Frage kommende Winkel für $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ oder $\tilde{\gamma}$ zu verwenden.

Sind nun die $6n$ vollständigen Starrkörperkoordinaten des Systems bekannt, wird vom Hauptprogramm der Integrierer *de* für Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung aufgerufen. Da die $6n - m$ Bewegungsgleichungen von 2. Ordnung sind, müssen sie durch die Substitution $\dot{x} = X, \ddot{x} = \dot{X}$ in ein System von $2(6n - m)$ Differentialgleichungen 1. Ordnung umgewandelt werden. Die Ableitungen \dot{x}, \dot{X} müssen dem Integrierer *de* von der Routine *f* zur Verfügung gestellt werden. Während \dot{x} aus den Geschwindigkeiten in den Anfangsbedingungen bekannt ist, müssen die Beschleunigungen \dot{X} des Systems durch Lösen des linearen Gleichungssystems 45 bestimmt werden.

Der von *bgg* erzeugte Code muß also in der Routine *f* eingefügt werden. In *f* werden außerdem alle zeitabhängigen Größen, die in der Massenmatrix \underline{A} und in der Inhomogenität \underline{b} vorkommen, berechnet. Speziell die zeitabhängigen äußeren Kräfte und Momente müssen von den in *f* aufgerufenen Subroutinen *kraefte* und *momente* bereitgestellt werden. Das lineare Gleichungssystem wird in *f* von den Routinen *degefa* und *degesl* der „Linpack“-Bibliothek gelöst, wobei man neben den Beschleunigungen auch noch die Zwangskraftkomponenten erhält. Die Routine *f* ist so geschrieben, daß nur der von *bgg* erzeugte Code eingefügt werden muß und sonst nichts mehr zu codieren ist.

Letztlich werden dann die Ergebnisse der Simulationsrechnung von der Routine *ausgabe* als Text-Dateien ausgegeben.

Bei der Erstellung eines neuen Modells muß zunächst die Eingabedatei *anfbed* abgeändert und dementsprechend das Einlesen im Hauptprogramm modifiziert werden. Je nach Wahl der generalisierten Koordinaten bei der Eingabe, ist die für die Erzeugung vollständiger Koordinaten zuständige Routine *spek* anzupassen. Ebenso muß die Routine *ausgabe* an die Bedürfnisse der Datenweiterverarbeitung angepaßt werden.

Die Hauptarbeit bei der Erstellung eines neuen Modells liegt aber im Schreiben der Unterprogramme *kraefte* und *momente*. Die Routine *kraefte* muß alle Kräfte außer den Zwangskräften zur Verfügung stellen. In ihr werden beispielsweise die äußeren Kräfte, die wirken, wenn das Mehrkörpersystem mit der Umwelt in Kontakt tritt nach geeigneten Algorithmen, in Abhängigkeit etwa von elastomechanischen Eigenschaften der in Kontakt tretenden Materialien, berechnet. Insbesondere sind die Kontaktprüfungen durchzuführen, welche bei komplexen Geometrien von Modell oder Umwelt sehr aufwendig werden können. Die von den berechneten Kräften verursachten Drehmomente müssen auf dem gegenwärtigen Entwicklungsstand noch extra programmiert werden. Eine ohne allzu großen Aufwand zu realisierende Verbesserung wäre eine Subroutine zu *kraefte* mit standardisierter Schnittstelle, welche diese Drehmomente automatisch errechnet, so daß sich der Benutzer hierum nicht mehr zu kümmern braucht.

Die Routine *momente* macht alle Drehmomente, die nicht von Zwangskräften erzeugt sind für die Simulation verfügbar. Die Drehmomente der äußeren Kräfte werden genauso an *f* übergeben, wie zum Beispiel Drehmomente, die in den Gelenken des Mehrkörpersystems wirken. Dies können etwa muskulär erzeugte Drehmomente in den Gelenken eines biologischen Organismus, oder durch Stellmotoren erzeugte Momente in den Gelenken eines Roboters sein.

2.3 Die Bewegungsgleichungen im 2D-Fall

Im zweidimensionalen Fall vereinfachen sich vor allem die Eulergleichungen erheblich. Sowohl der Trägheitstensor $\underline{\theta}$, als auch die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$, das Drehmoment \underline{M} und der Drehimpuls \underline{L} werden zu skalaren Größen und statt der drei Eulerwinkel α, β, γ gibt es dann nur noch einen Winkel ϕ zur Beschreibung der Orientierung des Starrkörpers. Die Rotationsbewegung wird dann einfach beschrieben durch

$$\dot{L} = \theta \dot{\omega} = \theta \dot{\phi} = M \quad (47)$$

Die *bgg*-Version für ebene Bewegungen wurde von [Krieg, 1992] erweitert und in eine sehr komfortable Umgebung eingebettet. Mit dem so entstandenen Programmpaket namens *simsys* sind die in dieser Arbeit vorgestellten Simulationen gerechnet worden. Eine ausführliche Beschreibung von *simsys* findet sich in [Krieg, 1992]. Deshalb ist im Anhang nur eine Übersicht über *simsys* gegeben.

3 Biomechanische Schwabbelmassen-Modelle

Um die mechanischen Belastungen im menschlichen Bewegungsapparat bei stark beschleunigten Bewegungen mit Hilfe von Computersimulationen befriedigend genau zu bestimmen, haben sich die sogenannten Schwabbelmassen-Modelle bewährt. Wenn im folgenden von hohen Beschleunigungen die Rede ist, sollen natürlich auch immer starke Verzögerungen eingeschlossen sein. Die Idee der Schwabbelmasse wurde 1985 von [Gruber, Denoth, Stuessi, Ruder, 1987] eingeführt und von [Gruber, 1987], [Widmayer, 1990] und [Krebs, 1991] erfolgreich angewendet.

Modelliert man, wie dies üblicherweise geschieht, den menschlichen Körper in Form einer kinematischen Kette, die in etwa die Verzweigungsstruktur des Skeletts besitzt, mißachtet man die Tatsache, daß in Wirklichkeit weniger als die Hälfte der Körpermasse im Skelett lokalisiert ist und die gesamte restliche Masse gedämpft-elastisch, also nicht durch Zwangsbedingungen, an das Skelett gekoppelt ist. Dies beeinflusst freilich das mechanische Verhalten ganz nachhaltig. Die gedämpft-elastisch angekoppelten Massen der einzelnen Körperglieder werden als Schwabbelmassen bezeichnet. Nach [Clauser, McConville, Young, 1969] und [Gruber, 1987] sind die Massen ungefähr wie folgt im Körper verteilt:

Anteil an der Gesamtkörpermasse:

beide Unterschenkel	:	12%
beide Oberschenkel	:	22%
Rumpf einschließlich Armen und Kopf	:	66%

Verhältnisse von Knochenmassen zu Schwabbelmassen:

Unterschenkel	:	Knochenmasse	22%	Swabbelmasse	78%
Oberschenkel	:	Knochenmasse	25%	Swabbelmasse	75%
Rumpf	:	Knochenmasse	50%	Swabbelmasse	50%

Bei extremen Beschleunigungen, wie sie vor allem bei Stößen auftreten, üben die Schwabbelmassen einen stark dämpfenden Einfluß auf die Bewegung aus. Im Vergleich zu Simulationen, denen ein Modell mit ausschließlich gelenkig verbundenen Starrkörpern zugrunde liegt, ergeben sich bei Rechnungen mit Schwabbelmassen-Modellen auch weit geringere und realistischere Reaktionskräfte.

Der Grund hierfür ist, daß nur die Massen der Knochen stoßartig beschleunigt werden, während die Schwabbelmassen durch ihre elastische Kopplung vergleichsweise sanft nachfedern. Je größer die Massen zweier Stoßpartner sind, desto größer sind, bei ansonsten gleichen Stoßbedingungen, die auftretenden Stoßkräfte. Einen qualitativen Eindruck davon erhält man bei der Betrachtung eines einfachen Systems, bei dem eine Masse m mit der Geschwindigkeit v auf den Boden prallt und die Wechselwirkung durch eine lineare Feder mit der (unter Umständen sehr harten) Federkonstanten k gegeben ist. Die größte Kraft bei diesem Stoß tritt auf, wenn die Feder maximal deformiert ist, das heißt, wenn die gesamte kinetische Energie der Masse aufgezehrt ist und in der Federdeformation steckt. Die Deformation sei jetzt Δz_{\max} . Bei einer harten Feder mit wenig Deformation kann die Änderung der potentiellen Energie entlang des Federweges unberücksichtigt bleiben. Gleichsetzen der kinetischen Energie und der Deformationsenergie der Feder liefert dann die Maximalkraft F_{\max} .

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\Delta z_{\max}^2 \quad (48)$$

und mit $\Delta z_{\max} = \frac{F_{\max}}{k}$ folgt daraus

$$F_{\max} = \sqrt{mv^2k} \quad (49)$$

Die maximal auftretende Stoßkraft ist also proportional zu \sqrt{m} . Am Unterschenkel, dessen Aufprall bei einem Niedersprung in gebeugter Haltung den größten Anteil an der Kraftspitze der Landung hat, ist das Verhältnis von Knochenmasse zu Schwabbelmasse circa 1/3. Das bedeutet daß mit einer völlig starren Modellierung im Moment des Landungsstoßes eine viermal größere Masse verzögert wird als bei einem Schwabbelmassen-Modell. Das Maximum der Bodenreaktionskraft wird deshalb auf das Doppelte des realistischen Wertes überschätzt.

3.1 Möglichkeiten zur Modellierung der Schwabbelmassen

In Wirklichkeit bestehen die Schwabbelmassen hauptsächlich aus den Muskeln, den Organen, aus Bindegewebe und Fett. Da dies alles leicht deformierbare Materialien sind, müßte eine exakte Beschreibung kontinuumsmechanisch erfolgen. Eine solche Beschreibung würde aber für praktische Fragestellungen einen viel zu hohen Rechenaufwand erfordern. Es gilt also einfache Modelle für die Schwabbelmassen zu finden, die deren mechanische Effekte für die Anwendungen in der Orthopädie, den Sportwissenschaften, der Unfallforschung etc. hinreichend genau berücksichtigen.

3.1.1 Modellierung der Schwabbelmassen als Starrkörper

Eine von [Gruber, 1987] für ebene Bewegungen gewählte Möglichkeit, ist die Modellierung der Schwabbelmasse als Starrkörper, der an den zugehörigen Knochen durch eine longitudinale und eine transversale Kraftkomponente (F_t , F_l) und ein Drehmoment M gekoppelt ist (siehe Abbildung 9).

Die Kraftkomponenten werden berechnet in Abhängigkeit der Schwabbelmassenauslenkungen und ihrer Geschwindigkeiten Δl , $\Delta \dot{l}$, Δt , $\Delta \dot{t}$ gemäß:

$$F_l = (-a_l \Delta l^3 - b_l \Delta \dot{l}) f \quad (50)$$

$$F_t = (-a_t \Delta t^3 - b_t \Delta \dot{t}) f \quad (51)$$

mit den Parametern a_l , b_l , a_t , b_t und der Querschnittsfläche f der Schwabbelmasse.

Das Drehmoment wird in Abhängigkeit von $\Delta \phi$ und $\Delta \dot{\phi}$ berechnet als:

$$M = a_\phi \Delta \phi + b_\phi \Delta \dot{\phi} \quad (52)$$

Durch das nichtlineare Weg-Kraft-Gesetz bei der Konstruktion von F_l und F_t verhalten sich die Kraftkomponenten nicht gleich zueinander wie die Auslenkungen Δl und Δt . Folglich wirkt die resultierende Kraft \mathbf{F} nicht in Richtung des Verbindungsvektors $\Delta \mathbf{r}$ vom Schwerpunkt des Knochens zum Schwerpunkt der Schwabbelmasse. Wählt man als Bezugspunkt des Systems den Schwerpunkt des Knochens und läßt \mathbf{F} am Knochen mit positivem Vorzeichen angreifen, so erzeugt die reactio der Schwabbelmasse $-\mathbf{F}$ im abgeschlossenen System ein Drehmoment $-\Delta \mathbf{r} \times \mathbf{F} \neq 0$ das den Drehimpulsatz verletzt. Am Knochen muß man deshalb zusätzlich noch dieses Moment mit umgekehrtem Vorzeichen wirken lassen.

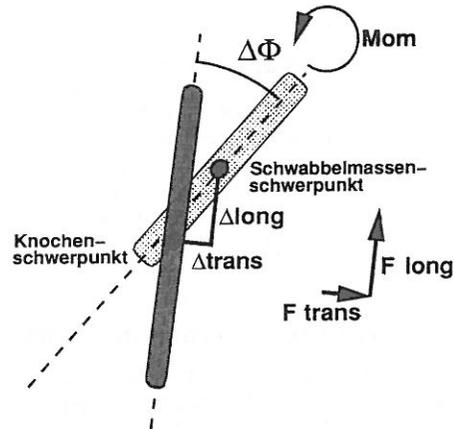


Abbildung 9: Schwabbelmassenankopplung nach Gruber[Gruber, 1987].

Im Hinblick auf dreidimensionale Simulationen ist die Aufhängung der als Starrkörper modellierten Schwabbelmassen am Knochen nach der oben beschriebenen Art problematisch. Abgesehen davon, daß die Notwendigkeit von Korrekturmomenten nicht besonders schön ist, müßten dann Algorithmen für drei Kraftkomponenten und drei Drehmomentkomponenten erstellt werden. Vor allem die Algorithmen für die Drehmomentkomponenten, die in Abhängigkeit von Euler- oder Kardanwinkeln formuliert werden müßten, wären sehr unanschaulich. Eine völlig unproblematische Art der Ankopplung, sowohl im ebenen als auch im dreidimensionalen Fall, läßt sich durch Verwendung mehrerer Federn in der Art von Gleichung 53 realisieren (siehe Abbildung 10).

$$K_{\text{Feder}} = a(l - l_0)^b + c l^d \quad (53)$$

Mit

- K_{Feder} : Betrag der Federrückstellkraft
- l_0 : Länge der entspannten Feder
- l : Tatsächliche Länge der Feder
- a, b, c, d : Federparameter

Im ebenen Fall sind mindestens zwei, im dreidimensionalen Fall mindestens drei Federn zur Ankopplung nötig. In *simsys* können für den ebenen Fall, wie bereits erwähnt, beliebig viele solcher Federn durch Angabe ihrer Parameter, ihrer entspannten Länge sowie ihrer Aufhängepunkte eingebaut werden. Der Betrag der Rückstellkraft wird entsprechend Gleichung 53 berechnet und mit einem Einheitsvektor multipliziert, der in Richtung der Verbindungslinie zwischen den beiden Aufhängepunkten zeigt. Somit wirkt auch die Kraft immer in dieser Richtung und es ist gewährleistet, daß das Gesamtdrehmoment der Federkräfte, die ja innere Kräfte sind, verschwindet. Dies gilt eben auch, wenn der Betrag der Rückstellkraft in beliebiger nicht linearer Form von der Federdehnung und der Dehnungsgeschwindigkeit abhängt.

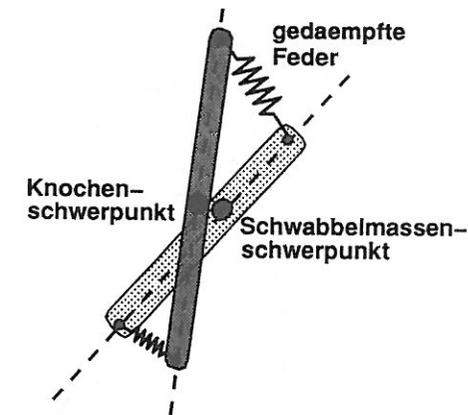


Abbildung 10: Schwabbelmassenankopplung mit Federn.

Für die Rückstellkräfte bei translativen Auslenkungen sind die Konstanten der modellierten Federn verantwortlich. Die Rückstellmomente bei Verdrehungen der Schwabbelmassen gegen die Knochen, können unabhängig davon eingestellt werden, indem die Federn nahe beieinander oder weiter entfernt voneinander eingehängt werden.

Die Simulationen der vorliegenden Arbeit sind mit dieser Art der Schwabbelmassenmodellierung und -ankopplung gerechnet worden.

3.1.2 Modellierung der Schwabbelmassen mit Massenpunkten.

Noch einiges naturnaher als die Darstellung der Schwabbelmasse durch einen Starrkörper ist nach einer Idee von [Krebs, 1991] die Verwendung von mehreren Massenpunkten, die sowohl mit dem Knochen als auch untereinander gedämpft-elastisch gekoppelt sind. Bei Verwendung genügend vieler Massenpunkte geht diese Methode schon in Richtung Kontinuumsmechanik.

Die Dynamik eines Massenpunktes läßt sich durch nur zwei Newtonsche Gleichungen bei ebenen Bewegungen und drei solcher Gleichungen bei räumlichen Bewegungen beschreiben. Gerade im dreidimensionalen Fall ist ein Massenpunkt wegen des Fortfalls der komplizierten Eulergleichungen sehr viel einfacher zu behandeln als ein Starrkörper. Da der Starrkörper sechs Freiheitsgrade besitzt, und der Massenpunkt nur drei, wobei die zu diesen Freiheitsgraden gehörenden Gleichungen auch noch sehr einfach sind, erfordert die Simulation von zwei Massenpunkten weniger Rechenaufwand, als die eines Starrkörpers. Es ist daher wünschenswert, in *simsys* für die Zukunft die Verwendung von Massenpunkten vorzusehen.

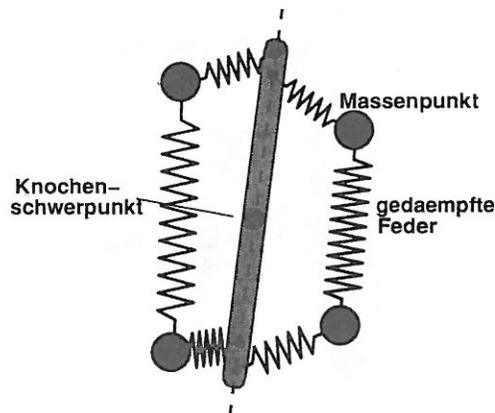


Abbildung 11: Schwabbelmassen als Massenpunkte.

3.2 Kontaktprüfung und Reaktionskräfte

Die mechanischen Eigenschaften eines Mehrkörpersystems, bestehend aus Starrkörpern und Massenpunkten, sind bestimmt durch die Massen seiner Einzelteile, die Trägheitstensoren der Starrkörper und die Charakteristika der Gelenke. Außer der Lagebeschreibung der Gelenke und eventuell der Orientierung der Gelenkachsen durch körperfeste Vektoren ist damit aber noch nichts über die Form des Mehrkörpersystems gesagt. Diese ist aber in dem Moment relevant, wo man reale Systeme modellieren will, deren einzelne Teile entweder die Umgebung oder sich gegenseitig berühren können, in einer Art die nicht durch Gelenke beschrieben ist. Um zu prüfen, ob eine solche Berührung stattfindet, müssen die geometrischen Gestalten der Körperoberflächen bekannt sein.

Nimmt man an, daß die Oberflächen von n Körpern durch Polygone beschrieben sind und p_i, p_j die Anzahlen der Polygone der Körper i und j seien, so ist die Zahl N der notwendigen Prüfungen ob sich zwei Polygone schneiden:

$$N = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n p_i p_j \quad (54)$$

Die Zahl N ist schon bei mäßig komplexen Geometrien recht groß. Für drei Quader mit ihren je sechs Seiten ist sie beispielsweise schon bei $N = 108$. Sie schwillt mit der Zahl der Körper und der zu deren Oberflächenbeschreibung nötigen Polygone sehr rasch an, so daß der Rechenaufwand für die Kontaktprüfung ganz immens sein kann. Durch ausgefeilte Strategien ist es möglich, den Aufwand zu reduzieren. So zum Beispiel, indem um die fraglichen Körper mit komplizierter Geometrie größere Volumina mit einfacher Geometrie wie Kugel oder Quader gelegt werden und erst im Falle eines leicht zu detektierenden Kontakts dieser Umhüllungsfläche eine genaue Kontaktprüfung mit der eigentlichen Körperoberfläche vorgenommen wird. Grundsätzlich jedoch bleibt die Kontaktprüfung eine rechenaufwendige Angelegenheit.

Außer der Form der Oberflächen müssen auch an jedem Punkt der Oberflächen die elastischen Eigenschaften der Körper gegeben sein, so daß für den Fall der Feststellung eines Kontakts zwischen zwei Körpern aus der Durchdringungstiefe, der Durchdringungsgeschwindigkeit und eventuell der Reibungskoeffizienten der Oberflächen eine Stoß- oder Reaktionskraft berechnet werden kann. Sowohl die Kontaktprüfung als auch die Berechnung der Reaktionskräfte sind während der Simulation an jeder Integrationsstützstelle durchzuführen.

Für die Simulationen in dieser Arbeit ist die geometrische Gestalt des Modells nur rudimentär berücksichtigt. An den Knochenenden als exponierte Stellen, wird geprüft, ob Kontakt zum Boden, beziehungsweise bei Abstürzen auf eine schwingende Bohle, ob Kontakt zur Bohle besteht. Dieses geschieht einfach durch Vergleich der z -Koordinaten der Knochenenden mit den z -Koordinaten von Boden oder Bohle. An den Gelenken wie Knie und Hüfte ist dieser Vergleich nur für eines der beiden aneinanderstoßenden Knochenenden nötig. Abhängig von der Eindringtiefe Δz und der Geschwindigkeit des Eindringens $\Delta \dot{z}$ wird die z -Komponente der Bodenreaktionskraft F_z berechnet.

$$F_z = a \Delta z^b + c \Delta z \Delta \dot{z}^d \quad (55)$$

$a, b, c, d |_z$: Parameter.

Während der Kontakt besteht, kann sich das Knochenende, durch horizontale Deformation, vom Auftreffpunkt um Δx entfernen. Daraus berechnet sich die x -Komponente der Bodenreaktionskraft:

$$F_x = a \Delta x^b + c \Delta \dot{x}^d \quad (56)$$

$a, b, c, d |_x$: Parameter.

Die Bodenreaktionskraft kommt natürlich nicht wirklich durch ein Eindringen der Knochenenden in den Boden zustande, sondern dadurch, daß sich hauptsächlich die Ferse in x - und z -Richtung um die Beträge Δx und Δz deformiert. Diese Deformation ist aber unbedeutend, was die Hebelverhältnisse am Modell betrifft, so daß sie wie ein Eindringen in den Boden behandelt werden kann. Das bedeutet, bei der Berechnung des Drehmoments der Bodenreaktionskraft bleibt die Verkürzung des Hebels durch die Deformation unberücksichtigt.

3.3 Gelenkwinkelbegrenzungen

Die Anatomie schränkt am menschlichen Körper viele Freiheitsgrade der Rotation auf einen mehr oder minder großen Winkelbereich ein. In der Ebene und bei Scharniergelenken von 3-D Modellen ist dieser Winkelbereich durch die Angabe eines minimalen und eines maximalen Gelenkwinkels recht einfach festzulegen. Da die Stellung eines Kugelgelenks aber durch drei Winkel beschrieben wird, ist die Menge der zulässigen Winkelkombinationen ein Volumen im Raum der zur Beschreibung verwendeten Euler- oder Kardanwinkel und muß daher in Form der Umhüllungsfläche dieses Volumens wie in Abbildung 12 angegeben werden.

Tatsächlich werden die Winkel am menschlichen Körper wie auch bei Maschinen durch Anschläge begrenzt, das heißt durch Kontakte zwischen mehreren Körpern des Systems. So ist das Knie bei der Beugung dadurch beschränkt, daß irgendwann die Wade gegen

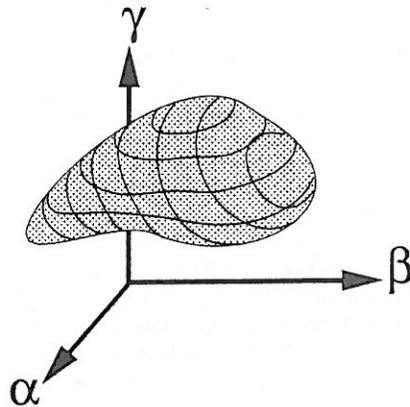


Abbildung 12: Darstellung der anatomisch zulässigen Winkel bei einem Kugelgelenk.

den Oberschenkel drückt und bei der Streckung gelenkinterne Anschläge durch sich strafende Bänder vorhanden sind. Wie im vorigen Abschnitt dargelegt wurde, kann aber eine Kontaktprüfung sehr aufwendig sein. In diesem speziellen Fall wären sehr viele Geometriedaten zur Beschreibung der Anatomie des Gelenks und der beiden damit verbundenen Gliedmaßen nötig. Es ist deshalb wesentlich einfacher nur die erlaubten Winkelbereiche anzugeben und Rechenverfahren zur Verfügung zu stellen, mit denen sich Drehmomente erzeugen lassen, die geeignet sind, die Gelenkwinkel am Verlassen des erlaubten Bereichs zu hindern. Dieses leisten Funktionen für Drehmomente, die an den Rändern des erlaubten Bereichs in Abhängigkeit von Winkel und Winkelgeschwindigkeit hohe rücktreibende Momente ergeben und mit der Entfernung vom Randbereich wieder schnell auf null abfallen. Um die Dauer der numerischen Integration nicht unnötig zu erhöhen, sollten die Funktionen außerdem stetig und differenzierbar sein. Die Verläufe der Funktionen müssen den an den Gelenkgrenzwinkeln auftretenden Drehmomentverläufen angepaßt werden und sollten daher genügend parametrisiert sein, um die Kurvenformen in geeigneter Weise abwandeln zu können. Eine Funktion für das Anschlagmoment M_ϕ , welche bei ebenen Problemen obige Forderungen erfüllt, ist die folgende:

$$M_\phi = \frac{1}{a|\phi_{\max} - \phi|^b + c} - \frac{1}{d|\phi_{\min} - \phi|^e + f} \quad (57)$$

mit
 ϕ_{\max}, ϕ_{\min} : Grenzwinkel
 ϕ : tatsächlicher Winkel
 a, b, c, d, e, f : Parameter

Die Kehrwerte der Parameter c und f ergeben die maximalen Beträge der Anschlagmomente an den Grenzwinkeln $\phi = \phi_{\max}$ beziehungsweise $\phi = \phi_{\min}$. Mit den Faktoren a und d sowie den Exponenten b und e lassen sich die Formen der Kurven im Grenzreich verändern. Mit den Parametern für das Knie, die sich bei unseren Simulationen als brauchbar erwiesen haben, sieht die Kurve M_ϕ wie in Abbildung 13 dargestellt aus.

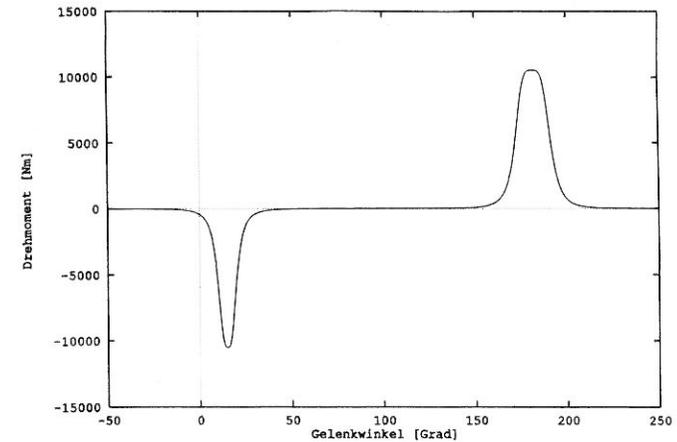


Abbildung 13: Nach Formel 57 berechnete Anschlagmomente

Bei der Berechnung des Rückstellmoments nach der Formel 57 erfolgt keine Energie-dissipation, weil die Gleichung noch keinen von der Winkelgeschwindigkeit abhängigen Dämpfungsterm enthält. In natura sind die Anschläge aber gedämpft, und in der Formel 57 ist deshalb ein geschwindigkeitsabhängiger Term hinzuzufügen, falls man die Dämpfung am Gelenkansschlag mitmodellieren will. In unseren Simulationen haben wir dies in der folgenden Form getan:

$$M_{(\phi, \dot{\phi})} = M_{(\phi)} + |D\dot{\phi}M_{(\phi)}| \operatorname{sgn} \dot{\phi} \quad (58)$$

mit $M_{(\phi)}$ nach Gleichung 57 und dem Parameter D .

Nachteilig bei dieser Art der Modellierung der Gelenkwinkelbegrenzung ist, daß das berechnete Moment nur an einer Stelle im gesamten erlaubten Winkelbereich exakt null ist. Es ist zwar bei geeigneter Parameterwahl über weite Bereiche sehr klein, aber auch ein solch kleines Moment ist in vielen Anwendungen noch störend. Darüber hinaus haben die Parameter keine sehr anschauliche Bedeutung.

Eine diesbezüglich bessere Formulierung ergibt sich nach Formel 59, in der die Momenten-Funktion stückweise zusammengesetzt ist.

$$M_\phi = \begin{cases} -a \left[\frac{\Delta\phi_{\min} - (\phi - \phi_{\min})}{\Delta\phi_{\min}} \right]^b & : \quad \phi_{\min} \leq \phi < \phi_{\min} + \Delta\phi_{\min} \\ 0 & : \quad \phi_{\min} + \Delta\phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max} - \Delta\phi_{\max} \\ c \left[\frac{\Delta\phi_{\max} - (\phi_{\max} - \phi)}{\Delta\phi_{\max}} \right]^d & : \quad \phi_{\max} - \Delta\phi_{\max} < \phi \leq \phi_{\max} \end{cases} \quad (59)$$

In Abbildung 14 ist ein mit Formel 59 erzeugter Momentenverlauf zu sehen, der etwa dem in Abbildung 13 dargestellten und nach Formel 57 berechneten entspricht.

Nach Formel 59 ist das Moment im mittleren Teil des zulässigen Winkelbereichs identisch null und hat nur in den Abständen $\Delta\phi_{\min}$ und $\Delta\phi_{\max}$ von den Begrenzungswinkeln

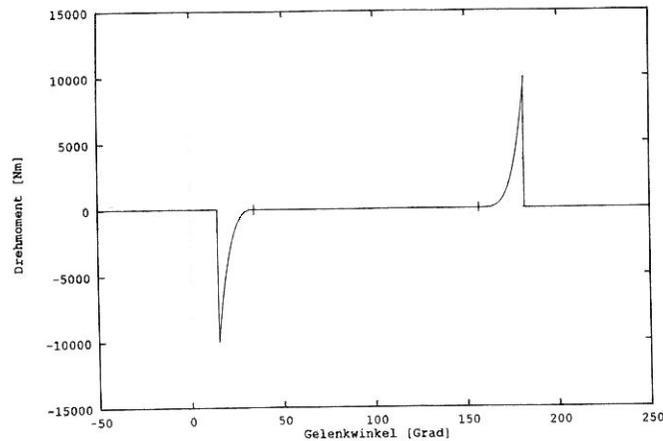


Abbildung 14: Nach Formel 59 berechnete Anschlagmomente

Werte ungleich null. Ihre maximalen Beträge erreichen die Anschlagmomente an den Grenzwinkeln mit $M_{(\phi_{\min})} = -a^b$ und $M_{(\phi_{\max})} = c^d$. An den Stellen $\phi = \phi_{\min} + \Delta\phi_{\min}$ und $\phi = \phi_{\max} - \Delta\phi_{\max}$ schließen die Funktionsstücke stetig und beliebig oft differenzierbar aneinander an.

Gelenkwinkelbegrenzungen der hier beschriebenen Art sollen nur die rein passiven Vorgänge im Bereich der Begrenzungswinkel modellieren. Nicht abgedeckt sind dadurch die Schutzreflexe, die den Menschen daran hindern, ein Gelenk mit voller Wucht gegen den Anschlag laufen zu lassen. Durch diese Reflexe wird schon vor Erreichen des mechanischen Anschlags mittels Muskelkräften ein Gegendrehmoment aufgebaut, so daß der Begrenzungswinkel, wenn überhaupt, nur mit kleiner Winkelgeschwindigkeit erreicht wird.

3.4 Innere Drehmomente und Motorik

Innere Drehmomente entstehen in den Gelenken des menschlichen Körpers im wesentlichen durch drei Mechanismen:

- rein anatomische Gelenkwinkelbegrenzungen (Anschläge),
- muskulär erzeugt, aber nicht willentlich kontrolliert (Reflexe),
- muskulär erzeugt, um willentlich Bewegungen zu steuern.

Der unter 3.3 behandelte erste Mechanismus spielt vor allem bei langsamen Bewegungen und bei Unfällen eine Rolle. Bei schnellen, gesteuerten Bewegungen ist er eher von minderer Bedeutung, da in diesem Fall der zweite und der dritte Mechanismus verhindern, daß das Gelenk überhaupt an seinen Anschlag gelangt und dort überbeansprucht wird.

Die beiden letzten Mechanismen bilden quasi die Motorik des Menschen. Mit ihrer Hilfe wird aus einer rein passiven Gliederpuppe ein Modell, das sich aktiv bewegen kann.

Die Entwicklung von Steuerungstechniken zur Simulation der Motorik ist daher eine ganz eigenständige Aufgabenstellung. Voraussetzung für diese Entwicklungsarbeit ist das Vorhandensein eines mechanisch korrekt beschriebenen passiven Modells. Schnittstellen zur Motorik sind dann die inneren Kräfte und die inneren Drehmomente.

Innere Kräfte werden im wesentlichen erzeugt und übertragen durch Muskeln, Sehnen, Bänder und Kontaktkräfte zwischen den Knochenoberflächen, wobei die Muskeln die einzig aktiven Elemente sind. Da nun eine Bewegungssteuerung mittels Algorithmen für die Muskelaktivitäten schon sehr in die anatomischen Details geht, haben wir uns bisher darauf beschränkt, Ansätze für die Bewegungssteuerung zu entwickeln, die etwas abstrakter mit inneren Drehmomenten arbeiten.

Die Gesamtheit der Muskelkräfte an einem Gelenk erzeugt letztlich ein resultierendes Drehmoment in dem Gelenk, das im weiteren als Muskelmoment bezeichnet wird. Das gesamte innere Moment in einem Gelenk besteht dann aus Muskelmoment und Anschlagmoment.

Es reicht nun zunächst aus, zur Entwicklung von Steuerungstechniken die Muskelmomente zu verwenden. Sind diese einmal bekannt, so kann versucht werden aus der Anatomie der Gelenke und den Muskelaktivitäten das Zustandekommen der Muskelmomente zu erklären.

3.4.1 Steuerung des Niedersprungs eines dreigliedrigen ebenen Modells

Um den Niedersprung eines ebenen dreigliedrigen Modells (siehe Abbildung 28) abzufangen, wurde die Steuerung der Muskelmomente mit einer Differentialgleichung realisiert. Die zeitliche Änderung des Muskelmoments in Knie oder Hüfte ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ des jeweiligen Gelenks. Sie ist außerdem abhängig vom momentan wirkenden Moment $M_{Mu(t)}$, dem maximal möglichen Moment M_{\max} , der momentanen Schwerpunktgeschwindigkeit in vertikaler Richtung \dot{z}_{Sp} und der vertikalen Schwerpunktgeschwindigkeit im Augenblick des Auftreffens \dot{z}_{Sp0} :

$$\dot{M}_{Mu} = a \left(1 + b \left(\frac{\dot{z}_{Sp}}{\dot{z}_{Sp0}} - 1 \right) \right) (M_{\max} - M_{Mu(t)}) \dot{\phi} \quad (60)$$

Diese Gleichung wurde nicht mit den Bewegungsgleichungen zusammen integriert, sondern es wurde die Änderung des Moments seit der letzten Integrationsstützstelle diskret berechnet:

$$\Delta M_{Mu} = a \left(1 + b \left(\frac{\dot{z}_{Sp}}{\dot{z}_{Sp0}} - 1 \right) \right) (M_{\max} - M_{Mu(t)}) \dot{\phi} \Delta t \quad (61)$$

so daß sich das Moment zur Zeit $t + \Delta t$ ergab als

$$M_{Mu}(t + \Delta t) = M_{Mu(t)} + \Delta M_{Mu} \quad (62)$$

Für Knie und Hüfte werden die Gleichungen mit unterschiedlichen Parametern und Vorzeichen angewendet.

Gleichung 60 beinhaltet, daß sich das Moment $M_{Mu(t)}$ nur asymptotisch dem maximalen, vom Trainingszustand abhängigen Moment M_{\max} nähern kann, weil die Änderung \dot{M}_{Mu} bei der Annäherung an M_{\max} gegen Null strebt: $M_{Mu(t)} \rightarrow M_{\max} \Rightarrow \dot{M}_{Mu} \rightarrow 0$

Ist der Schwerpunkt des Systems zur Ruhe gekommen ($\dot{z}_{Sp}=0$), so verschwindet, falls der Parameter $b = 1$ gesetzt wurde, die Momentenänderung \dot{M}_{Mu} . Das Modell bleibt

allerdings trotzdem nicht stehen, weil bei ruhendem Systemschwerpunkt die einzelnen Gliedmaßen noch ganz erhebliche Geschwindigkeiten besitzen können, die bewirken, daß nur die Schwerpunktschwindigkeit, nicht aber die Schwerpunktsbeschleunigung verschwindet. Der ruhende Systemschwerpunkt ist also nur ein Momentanzustand.

Um im stabilen Gleichgewicht stehen zu können, müßte das Modell außerdem mit einem Fuß ausgestattet sein, um bei einer Auslenkung aus der Gleichgewichtslage im Sprunggelenk ein Gegendrehmoment aufbauen zu können.

Wird der Parameter b in Gleichung 60 auf $b = 2$ gesetzt, wechselt die Momentenänderung bei ruhendem Systemschwerpunkt das Vorzeichen, so daß das Modell nach der Landung wieder wegspringt.

Bei Niedersprüngen auf einen federnden Untergrund hat sich nachteilig bemerkbar gemacht, daß das Moment nur in einer Richtung begrenzt ist und daher in vielen Fällen Drehmomente mit unrealistisch hohen Beträgen in der nicht begrenzten Richtung entstanden. Die Folge davon ist ein wildes Gezappel des Modells. Dies kann man verhindern, durch Multiplikation der Momentänderung mit einem Faktor, der in der Nähe eines Moments M_{\min} den Wert null annimmt, sonst aber in guter Näherung den Wert eins besitzt:

$$\Delta M_{Mu} = \Delta M_{Mu} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(M_{\min} - M_{Mu(t)}) \right) \quad (63)$$

Die hier geschilderte Steuerung ermöglicht keine Abfangbewegung des Modells bis zum Stillstand, aber sie leistet immerhin, daß bei einem Niedersprung für eine kurze Zeit nach dem Auftreffen am Boden, das Modell sich vernünftig bewegt.

3.4.2 Der Einsatz von Drehfedern zur Stabilisierung von Körperhaltungen

Eine einfache Strategie, um eine vorgegebene Gelenkstellung zu stabilisieren, ist die Anspannung zweier sich entgegenwirkender Muskeln, des Agonisten und des Antagonisten bei einem Sollwinkel ϕ_{soll} in der Art, daß das resultierende Drehmoment Null ist.

Gleichgültig, in welche Richtung nun durch äußere Einwirkung der Gelenkwinkel vom eingestellten Sollwinkel abweicht, erzeugen die zusätzliche Dehnung der Sehnen und Muskeln auf der einen Seite und die Entspannung auf der anderen Seite ein Rückstellmoment (siehe Abbildung 15). Das Gelenk kehrt, wenn die äußere Einwirkung fortfällt, ohne aktive Steuerung zu seinem Sollwinkel zurück. Dieses entspricht näherungsweise dem Verhalten einer Drehfeder im Gelenk, wobei der Winkel, bei dem die Feder entspannt ist je nach Sollwinkel verändert werden kann.

Die Drehfedern müssen gedämpft sein und sie besitzen unter Umständen nicht lineare Kennlinien. Deshalb wurden sie wie folgt angesetzt:

$$M_{\text{Fed}} = a(\phi - \phi_{\text{soll}})^b + c \frac{d}{dt}(\phi - \phi_{\text{soll}})^d \quad (64)$$

Die Federcharakteristik ist sicherlich nicht exakt symmetrisch bezüglich Beugung und Streckung, was allerdings unberücksichtigt bleiben soll. Experimentelle Untersuchungen zu den Federeigenschaften von einzelnen Muskeln und von durch Muskeln verspannten Gelenken wurden durchgeführt von [McMahon, 1984]

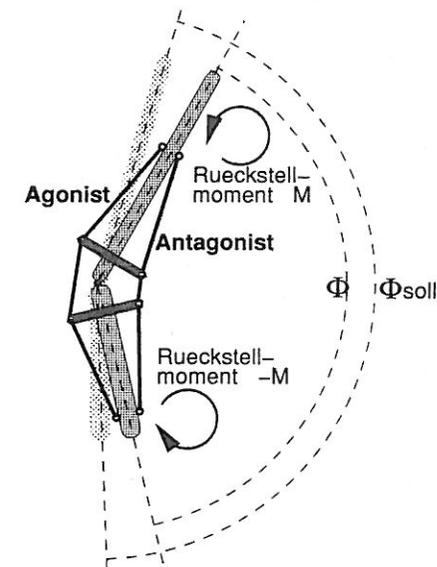


Abbildung 15: Verspannung eines Gelenks mit Agonist und Antagonist

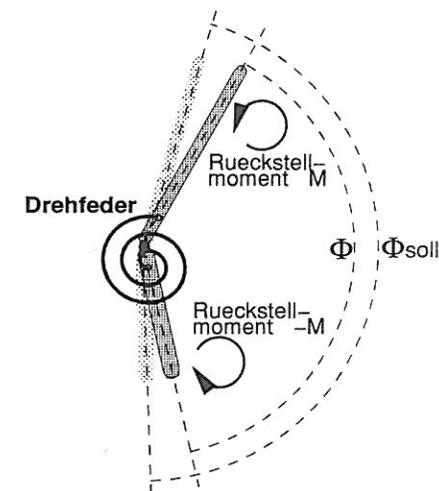


Abbildung 16: Ersetzung von Agonist und Antagonist durch eine Drehfeder

Zum Tragen kommt diese Strategie der Verspannung zum Beispiel auch bei der Landung nach einem Niedersprung. Hierbei werden die Muskeln an Knie und Hüfte schon während des freien Falls so angespannt, daß kein resultierendes Moment entsteht. Beim Auftreffen, kommen dann durch die Gelenkwinkeländerung sofort Drehmomente zustande, die einem Zusammenklappen des Körpers entgegenwirken. Diese Drehmomente bauen sich viel schneller auf, als dies durch bewußte Reaktion auf das Auftreffen möglich wäre. Insofern ist auch gerechtfertigt, daß nach Gleichung 60 sofort nach dem Auftreffen (wenn $\dot{\phi} \neq 0$ wird) ein Drehmoment aufgebaut wird.

Eine nützliche Anwendung finden die Gelenkdrehfedern bei der Stützmotorik für den aufrechten Stand des Menschen. In der gewünschten Körperhaltung, die natürlich so sein muß, daß der Körperschwerpunkt zwischen dem vordersten und dem hintersten Bodenkontaktpunkt liegt, werden die Gelenke soweit verspannt, wie notwendig ist um die Körperhaltung zu stabilisieren. Die oberhalb eines Gelenks liegenden Gliedmaßen erzeugen durch ihr Gewicht ein Drehmoment, das durch Vorspannen der Drehfedern kompensiert werden muß. Die Drehfedern könnten aber auch so hart modelliert werden, daß durch dieses Moment nur geringe Abweichungen von den Sollwinkeln entstehen, was allerdings einem sehr verkrampften Stehen entspräche.

Um den aufrechten Stand zu stabilisieren muß im Idealfall nur einer der beiden Muskeln aus Abbildung 15 angespannt werden, weil das Rückstellmoment des Gegenspielers ersetzt werden kann, durch die Momente, die vom Gewicht der oberhalb des Gelenks liegenden Gliedmaßen stammen (siehe Abbildung 17).

In der Abbildung 18 sind die Simulationsergebnisse für einen stehenden Menschen dargestellt. Die z-Koordinate des Fußes wurde in den Anfangsbedingungen zwar gleich dem Bodenniveau gewählt, aber dadurch daß die Fersendeformation noch nicht erfolgt war, befand sich das System nicht im Gleichgewicht. Der in Abbildung 18 dargestellte Zeitverlauf der Drehfedermomente zeigt, wie das System von selbst ins Gleichgewicht findet.

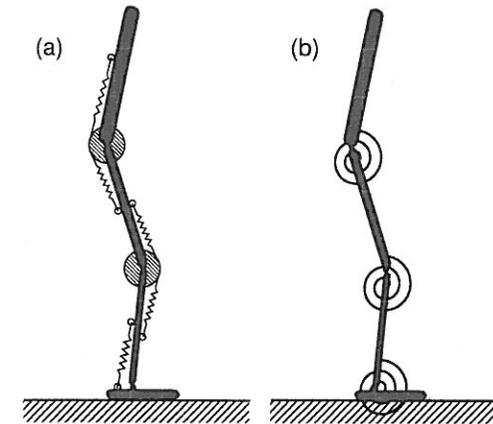


Abbildung 17: Zur Stabilisierung des aufrechten Stehens benötigte Muskeln (a) und Modellierung mit Hilfe von Drehfedern (b)

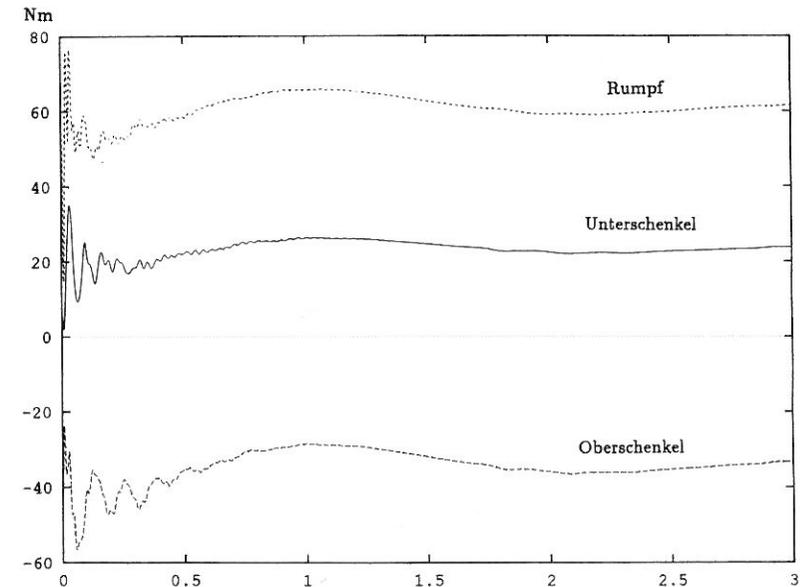


Abbildung 18: Drehfedermomente bei der Stabilisierung des Standes

3.5 Allgemeine Ansätze zur Bewegungssteuerung

3.5.1 Interaktive Kontrolle

Eine eher experimentelle Art, Bewegungen zu steuern, besteht darin, während des Simulationslaufes interaktiv die Muskelmomente mit Hilfe von Eingabegeräten wie Drehpotentiometer oder Joystick zu regeln und die Werte abzuspeichern. Dazu notwendig ist allerdings eine leistungsfähige grafische Ausgabe, die die Körperstellung simultan zur numerischen Integration darstellt. Die Geschwindigkeit des Programmablaufs sollte so eingestellt werden, daß eine Bewegungsanimation in starker Zeitlupe entsteht, so daß der Benutzer bequem über die Muskelmomentregler in den Bewegungsablauf eingreifen kann. Hat man auf diese Weise eine Bewegung synthetisiert, die einigermaßen realistisch wirkt, sind zumindest einmal die groben Zeitverläufe der Muskelmomente bekannt. Die so gewonnenen Muskelmoment-Zeit-Kurven können dann noch in Details abgeändert und für weitere Versuche als Wertetabellen wieder in das Simulationsprogramm eingefüttert werden. Man erhält dadurch zwar keinen mathematischen Algorithmus für die zu steuernde Bewegung, aber man kann immerhin Muskelmoment-Wertetabellen für komplexe, längere Bewegungsfolgen erzeugen, die sich unter Umständen gar nicht mehr mit einem geschlossenen mathematischen Algorithmus bewältigen lassen. Eine Bewegungssteuerung über Muskelmoment-Wertetabellen entspricht ja auch in etwa der Ausführung einer gut gelernten, automatisierten Bewegung, wo das Muster der Muskelaktivierungen auch schon abgespeichert ist, und nur noch im Falle kleiner Störungen nachgeregelt wird.

3.5.2 Fuzzy-Logik

Wie schwierig es ist, die Regeln nach denen der Mensch seine Bewegungen kontrolliert in einer algebraischen Form zu fassen, zeigt die recht komplizierte Form der Gleichung 60 die nur in der Lage ist, eine ganz spezielle einfache Bewegung, nämlich das Abfangen eines Niedersprungs, ansatzweise zu steuern. Werden die Bewegungen komplizierter, und stellt man höhere Ansprüche an die Robustheit der Algorithmen gegenüber leicht veränderten Bedingungen, so wird es sehr mühselig, hierfür noch geschlossene algebraische Formen zu finden.

Einen Ausweg bietet hier die Anwendung der Mitte der Siebziger-Jahre entwickelten Fuzzy-Logik. Diese gestattet die relativ einfache maschinentaugliche Formulierung von Steuerungsregeln mit Hilfe von sogenannten linguistischen Variablen. Solche Variablen können mit unscharfen Begriffen wie „sehr“, „wenig“, „stark“, „schwach“ etc. belegt werden, so daß die Steuerungsregeln in einer der Umgangssprache ähnlichen Art zu formulieren sind. Zur Steuerung technischer Vorgänge hat die Fuzzy-Logik in jüngerer Zeit sehr an Beliebtheit gewonnen.

Mit der in unserer Arbeitsgruppe erst seit Kurzem eingesetzten Fuzzy-Logik hat [Widmayer, 1990] schon eine erfolgreiche Regelung für das aufrechte Stehen des Menschen erstellt.

3.5.3 Neuronale Netze

Der Vollständigkeit halber sei noch die Möglichkeit der Bewegungssteuerung mit neuronalen Netzen erwähnt. Die Theorie der Neuronalen Netze entstand aus dem Versuch die Informationsverarbeitung in der menschlichen Hirnrinde nachzubilden. Ein neuronales

Netz besteht aus einzelnen Nervenzellen (Neuronen) die über Synapsen miteinander verschaltet sind. In der Natur sind die Synapsen Kontaktstellen zwischen zwei Nervenzellen, an denen Signale mit Hilfe chemischer Botenstoffe übertragen werden. In der Simulation sind die Synapsen einfach Verbindungen zwischen Neuronen, die die übertragenen Reize hemmen oder verstärken, entsprechend ihrer sogenannten „Synapsenstärke“. Wird nun ein bestimmtes Reizmuster von den Sinneszellen über die Eingangssynapsen auf die Eingangsneuronen gegeben, so wird dieses über Synapsen und Neuronen durch das Netz weitergeleitet und ergibt je nach der Topologie des Netzes und der Synapsenstärken ein Ausgangsmuster, das dann zu Steuerungszwecken verwendet wird. Durch Änderung der einzelnen Synapsenstärken ist das Ausgangsmuster variierbar.

Neuronale Netze bieten die Möglichkeit, lernfähige Steuerungen zu bauen, indem die Synapsenstärken so lange in einem evolutionären Prozess abgeändert werden, bis der gewünschte Zusammenhang zwischen Eingangsmuster und Ausgangsmuster besteht. [Erhardt, 1992] ist es gelungen, ein dreigliedriges Modell das Aufstehen aus der Kniebeuge mit neuronalen Netzen selbsttätig lernen zu lassen. Der Raum der Eingangsreizmuster bestand dabei aus den Gelenkwinkeln von Knie, Hüfte und Sprunggelenk sowie deren Geschwindigkeiten. Gesteuert wurden die Muskelmomente in den drei Gelenken.

4 Absturzsimulationen

Im Rahmen des Projekts „Optimierung von Auffangeinrichtungen / Biomechanische Beanspruchungsgrenzen des Menschen“ wurden Abstürze

- einer Kugel
- und eines Probanden

auf federnde Gerüstbohlen simuliert und mit Experimenten verglichen.

4.1 Kugelfallexperimente

Für die Zulassungsprüfung von Gerüstbelägen sind gemäß [DIN 4420, 1988] Kugelfallversuche durchzuführen. Damit soll der Festigkeitsnachweis bei der dynamischen Belastung durch eine abstürzende Person geführt werden. Abbildung 19 zeigt die Versuchsanordnung. Eine stählerne Prüfkugel fällt auf den zu prüfenden Gerüstbelag, der mit Auflager- und Einspannvorrichtungen montiert ist, wie sie in der Praxis verwendet werden. Als Dämpfungselement ist ein ledernes Faßkissen mit Korkfüllung oder eine Hartschaumplatte auf den Belag gelegt. Das Dämpfungselement soll zum einen ganz grob die Federeigenschaften des Menschen repräsentieren und zum andern verhindern, daß bei Holzbelägen schon bei geringen Kugelfallhöhen Splitterungen in Faserrichtung auftreten.

In [BIA-Report, 1984] sind Meßkurven zu diesen Versuchen angegeben und es wird ein einfaches mechanisches Modell, bestehend aus zwei Massen und zwei Federelementen, vorgeschlagen (siehe Abbildung 20), für welches nun die Bewegungsgleichungen aufgestellt und gelöst werden sollen. Die Masse m_1 repräsentiert die Masse der Kugel und m_2 die effektive Masse des Gerüstbelags. Diese ist nach [BIA-Report, 1984]

$$m_2 = \frac{48}{\pi^4} \rho b d l \quad (65)$$

mit

- ρ : Massendichte des Gerüstbelags
 b, d, l : Breite, Dicke, Länge des Gerüstbelags

Das elastische Verhalten des Dämpfungselements ist durch eine lineare Feder mit der Federhärte k_1 dargestellt. Eine weitere lineare Feder mit der Härte k_2 modelliert die Biegeelastizität des Gerüstbelags. Seien z_{10} und z_{20} die Orte der Massen m_1 und m_2 bei entspannten Federn, so ist die Dehnung Δl_1 der Feder k_1

$$\Delta l_1 = (z_1 - z_2) - (z_{10} - z_{20}) \quad (66)$$

Die Dehnung der Feder k_2 ist

$$\Delta l_2 = z_2 - z_{20} \quad (67)$$

Damit ergeben sich die Bewegungsgleichungen des Systems durch Addition der auf die Massen einwirkenden Kräfte:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 m_1 &= -k_1 [(z_1 - z_2) - (z_{10} - z_{20})] - m_1 g \\ \ddot{z}_2 m_2 &= k_1 [(z_1 - z_2) - (z_{10} - z_{20})] - k_2 (z_2 - z_{20}) - m_2 g \end{aligned} \quad (68)$$

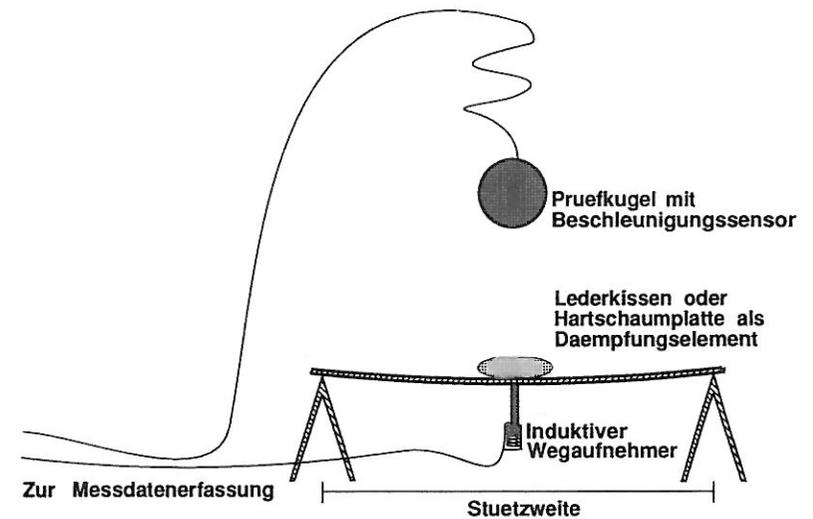


Abbildung 19: Versuchsaufbau der Kugelfallexperimente

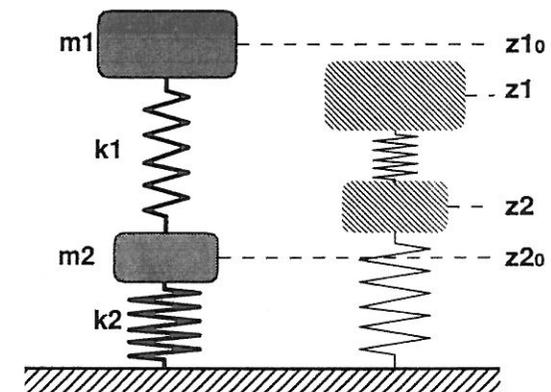


Abbildung 20: Modell für Kugelfallexperimente

Die Gleichungen 68 aufgelöst und nach Variablen geordnet:

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 &= -\frac{k_1}{m_1}z_1 + \frac{k_1}{m_1}z_2 + \frac{k_1}{m_1}(z_{10} - z_{20}) - g \\ \ddot{z}_2 &= \frac{k_1}{m_2}z_1 + \frac{-k_1 - k_2}{m_2}z_2 + \frac{k_1}{m_2}(z_{20} - z_{10}) + \frac{k_2}{m_2}z_{20} - g\end{aligned}\quad (69)$$

Die Gleichungen 69 bilden ein inhomogenes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung, das die Form der Gleichungen 70 hat und sich analytisch lösen läßt.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 + c \\ \ddot{x}_2 &= dx_1 + ex_2 + f\end{aligned}\quad (70)$$

Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Systems besteht aus der Addition einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems zur allgemeinen Lösung des homogenen Systems. Das homogene System von 69 besitzt die allgemeine Lösung [Kamke, 1944]

$$\begin{aligned}x_1 &= \sum_{n=1}^4 C_n \exp(\lambda_n t) \\ x_2 &= \sum_{n=1}^4 C_n \frac{\lambda_n^2 - a}{b} \exp(\lambda_n t)\end{aligned}\quad (71)$$

Die Größen λ_n sind die Lösungen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^4 - (a+d)\lambda^2 + ad - bc = 0\quad (72)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}}\quad (73)$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist in [Kamke, 1944] angegeben und lautet:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{de - bf}{cb - ad} \\ x_2 &= \frac{af - ec}{cb - ad}\end{aligned}\quad (74)$$

Somit ist die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems 69

$$\begin{aligned}x_1 &= \sum_{n=1}^4 C_n \exp(\lambda_n t) + \frac{de - bf}{cb - ad} \\ x_2 &= \sum_{n=1}^4 C_n \frac{\lambda_n^2 - a}{b} \exp(\lambda_n t) + \frac{af - ec}{cb - ad}\end{aligned}\quad (75)$$

Die Konstanten C_n ; $n = 1 \dots 4$ sind mit Hilfe der Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Der Systemzustand zur Zeit $t = 0$ sei wie folgt: $x_{1(0)}, x_2(0), \dot{x}_{1(0)}, \dot{x}_{2(0)}$. Kürzt man die Terme $\lambda_n^2 - a/b$, ($n = 1 \dots 4$) ab zu α_n so liefern die Lösung 75 und deren Zeitableitung ein lineares Gleichungssystem dessen Lösungsvektor aus den Konstanten C_n besteht.

$$\begin{aligned}x_{1(0)} &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \frac{de - bf}{cb - ad} \\ x_{2(0)} &= C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + C_3\alpha_3 + C_4\alpha_4 + \frac{af - ec}{cb - ad} \\ \dot{x}_{1(0)} &= C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3 + C_4\lambda_4 \\ \dot{x}_{2(0)} &= C_1\alpha_1\lambda_1 + C_2\alpha_2\lambda_2 + C_3\alpha_3\lambda_3 + C_4\alpha_4\lambda_4\end{aligned}\quad (76)$$

Der in [BIA-Report, 1984] mit Meßdaten dokumentierte Kugelfallversuch ist durchgeführt worden mit einer Kugel der Masse 75 kg und einer Gerüstbohle aus Fichtenholz (Dichte $\rho = 470 \text{ kg/m}^3$) mit den Abmessungen $0.28 \text{ m} \times 0.05 \text{ m} \times 2.75 \text{ m}$. Mit Formel 65 ergibt sich eine effektive Bohlenmasse von 8.9 kg. Die im quasistatischen Biegeversuch gewonnene Kraft-Biege-Kennlinie der Bohle ist ebenfalls in [BIA-Report, 1984] angegeben und hat im elastischen Bereich eine Steigung von 60 kN/m (siehe Abbildung 21). Durch eine Parameterstudie wurde die Federhärte des Dämpfungselements auf 70 kN/m festgelegt. Die Fallhöhe betrug $h = 1.5 \text{ m}$. Als Startzeitpunkt für die Simulation wird der Augenblick des Auftreffens der Kugel auf der Bohle gewählt. Dann ist $\dot{x}_{1(0)} = \sqrt{2gh} = 5.42 \text{ m/s}$. Nimmt man die Oberseite der Bohle im unbelasteten Zustand als $x = 0$ und wählt als Koordinatenbezugspunkte für die Bohle ebenfalls ihre Oberseite und für die Kugel den untersten Kugelpunkt, so sind die Parameter und Anfangsbedingungen des Systems wie

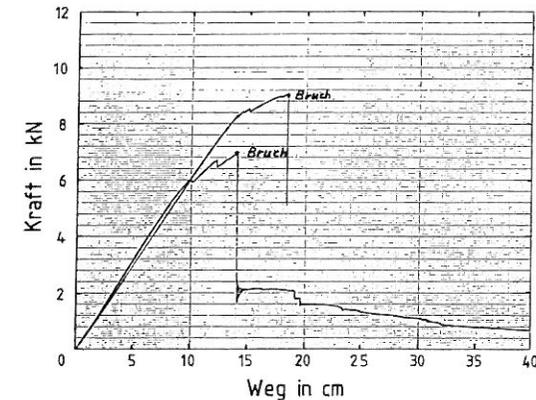


Abbildung 21: Kraft-Biege-Kennlinien zweier Fichtenbohlen, wie sie in quasistatischen Versuchen bestimmt wurden.

folgt gegeben:

$$\begin{aligned} m_1 &= 75 \text{ kg} \\ m_2 &= 8.9 \text{ kg} \\ k_1 &= 70 \text{ kN/m} \\ k_2 &= 60 \text{ kN/m} \\ x_{1(0)} &= 0 \\ x_{2(0)} &= 0 \\ \dot{x}_{1(0)} &= 5.42 \text{ m/s} \\ \dot{x}_{2(0)} &= 0 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten liefern die Gleichungen 75 und 76 sowie die Ableitungen der Gleichungen 75 Zeitverläufe für die Orte, Geschwindigkeiten und Kräfte, die in Anbetracht der Einfachheit des Modells schon erstaunlich gut mit den experimentellen Daten übereinstimmen. Aus den Abbildungen 22 bis 24 ist dieser Sachverhalt zu ersehen. Die Kräfte können bei den als Massenpunkte zu behandelnden Körpern der Kugel und der mittig belasteten Bohle einfach durch Multiplikation der Beschleunigungen mit den entsprechenden Massen errechnet werden. Die errechneten Werte sind immer für beide Körper abgebildet, während die Meßwerte nur für die Kugel zur Verfügung standen.

Beim Vergleich der Kraft-Zeit-Diagramme erkennt man deutlich die Auswirkungen der fehlenden Dämpfung des Modells. Dadurch klingen die Schwingungen in den berechneten Kurven nicht ab, wie es bei den Messungen der Fall ist.

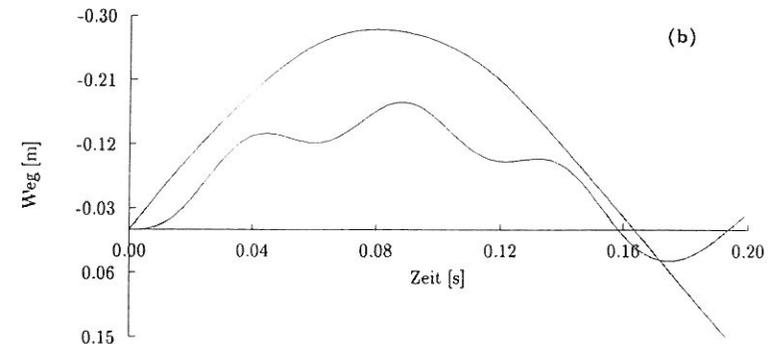
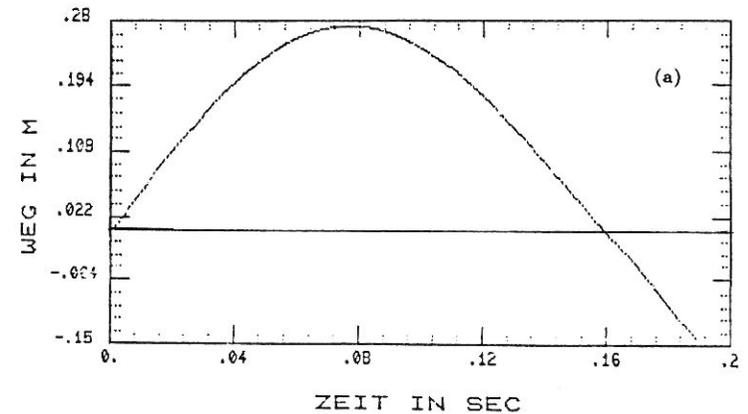


Abbildung 22: Weg-Zeit-Verlauf für einen Fallversuch Kugel auf Gerüstbohle; (a) gemessen, (b) berechnet

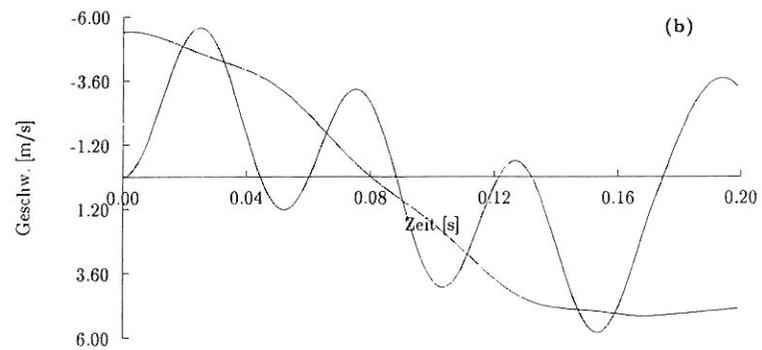
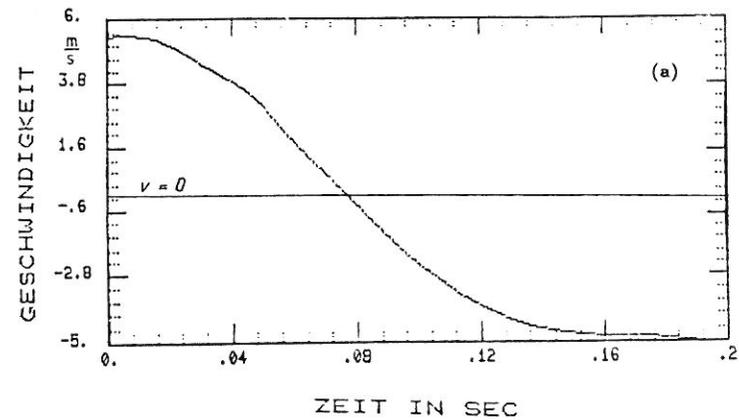


Abbildung 23: Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf für einen Fallversuch Kugel auf Gerüstbohle; (a) gemessen, (b) berechnet

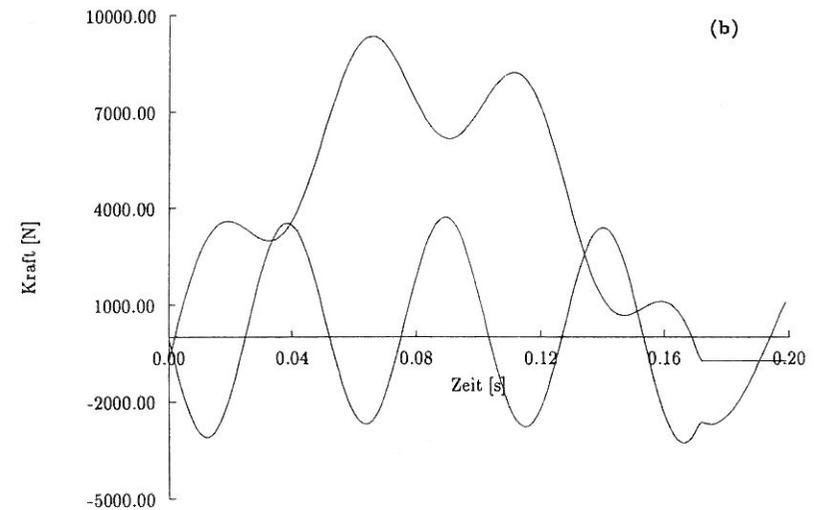
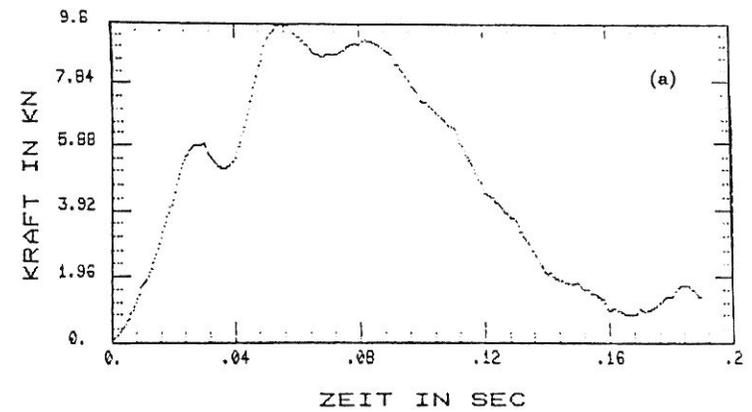


Abbildung 24: Kraft-Zeit-Verlauf für einen Fallversuch Kugel auf Gerüstbohle; (a) gemessen, (b) berechnet

Durch Anfügen von geschwindigkeitsabhängigen Termen an die Gleichung 68 wird das System gedämpft. Außerdem ist der Weg-Kraft-Zusammenhang des Faßkissens oder der Hartschaumplatte kaum über einen weiten Bereich linear, so daß man die Federn im Modell auch eventuell mit Exponenten $\neq 1$ versehen sollte. Das Gleichungssystem 68 wandelt sich dann zu:

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 m_1 &= -k_1 [(z_1 - z_2) - (z_{10} - z_{20})]^a - m_1 g - D_1 \dot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 m_2 &= k_1 [(z_1 - z_2) - (z_{10} - z_{20})]^a - k_2 (z_2 - z_{20})^b - m_2 g - D_2 \dot{z}_2\end{aligned}\quad (77)$$

mit den Dämpfungskonstanten D_1 und D_2 .

Für dieses Gleichungssystem mit Dämpfung und nichtlinearen Federn ist keine analytische Lösung mehr gesucht worden. Es wurde numerisch integriert und die Exponenten sowie die Dämpfungskonstanten in einer Parameterstudie angepaßt. Die auf diese Weise gefundenen Parameter sind:

$$\begin{aligned}k_1 &= 2.5 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1.5} \text{ kg/s}^2 \\ k_2 &= 6 \cdot 10^4 \text{ m}^{0.1} \text{ kg/s}^2 \\ a &= 2.5 \\ b &= 0.9 \\ D_1 &= 100 \text{ kg/s} \\ D_2 &= 330 \text{ kg/s}\end{aligned}$$

Bei der Parameterstudie zeigte sich, daß vor allem die Dämpfung der Bohle und der Exponent der Kraft-Weg-Kennlinie des Dämpfungselements, also die Parameter D_2 und a , für die richtige Modellierung relevant sind. Die Abbildungen 25 bis 27 zeigen die nach Gleichung 77 gerechneten zeitlichen Verläufe von Weg, Geschwindigkeit und Kraft, sowohl der Bohle, als auch der Kugel. Vor allem das Kraft-Zeit-Diagramm zeigt die erhebliche Verbesserung gegenüber dem einfachen Modell.

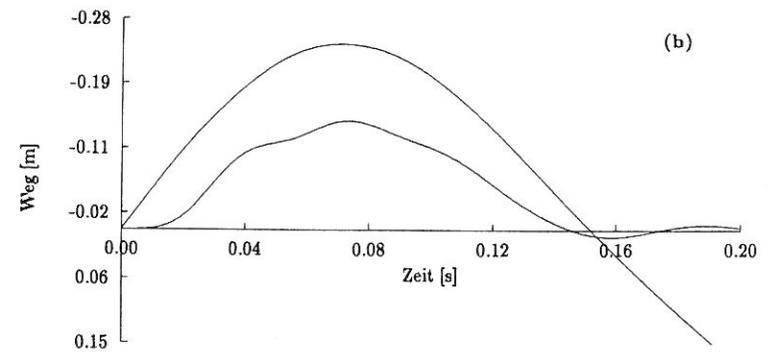
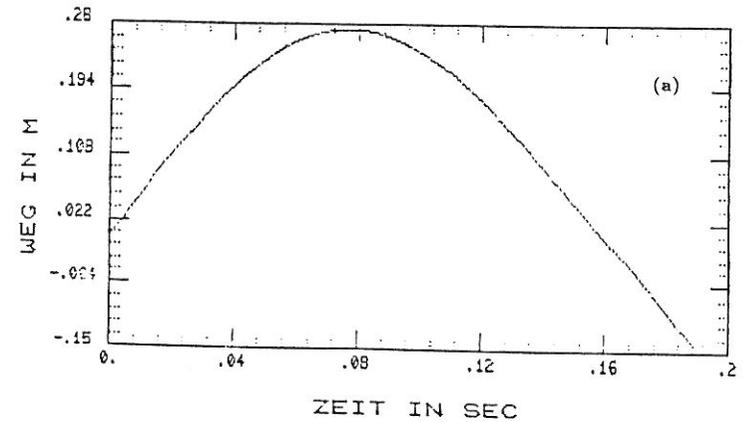


Abbildung 25: Weg-Zeit-Verlauf für einen Fallversuch Kugel auf Gerüstbohle mit Dämpfung; (a) gemessen, (b) berechnet

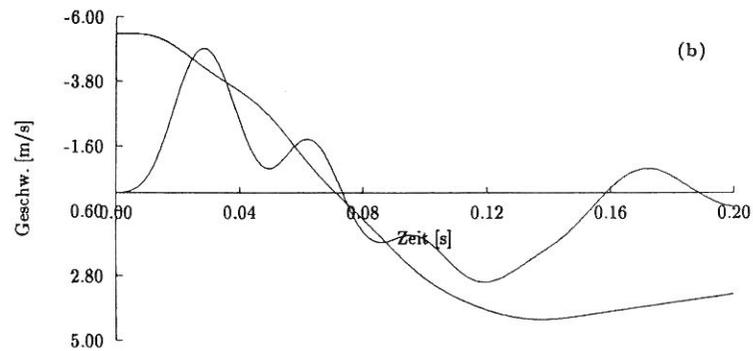
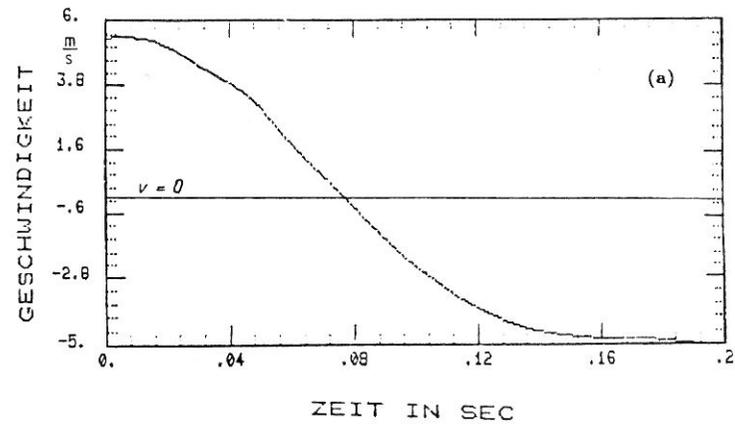


Abbildung 26: Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf für einen Fallversuch Kugel auf Gerüstbohle mit Dämpfung; (a) gemessen, (b) berechnet

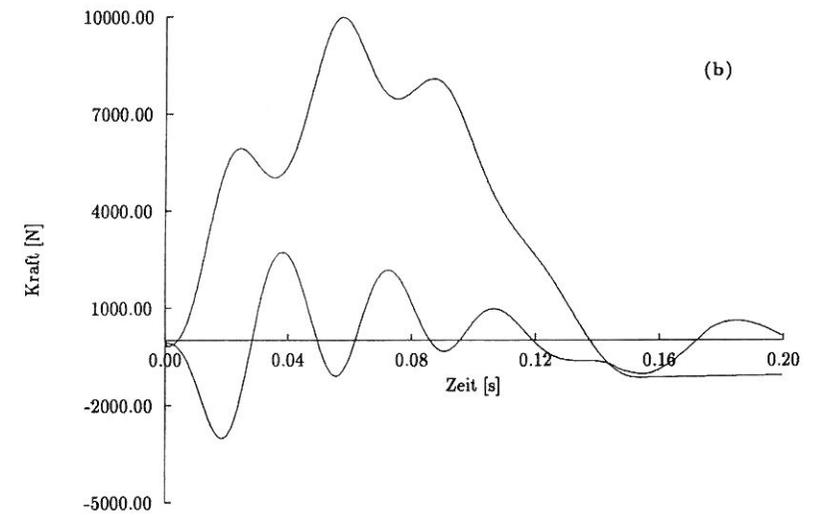
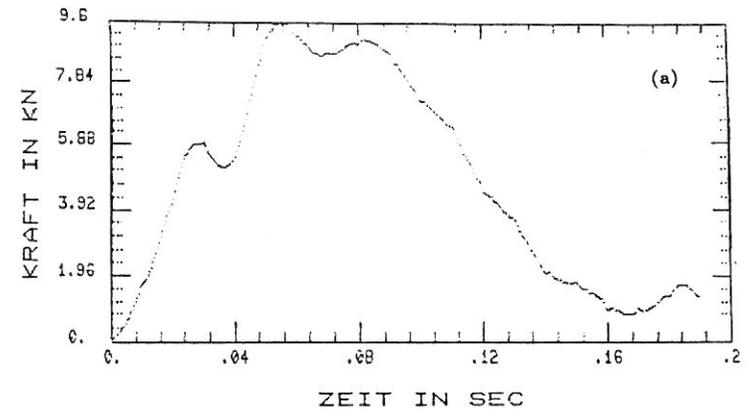


Abbildung 27: Kraft-Zeit-Verlauf für einen Fallversuch Kugel auf Gerüstbohle mit Dämpfung; (a) gemessen, (b) berechnet

4.2 Niedersprünge auf elastische Bohlen

Für die Simulation von Niedersprüngen eines Probanden auf elastische Gerüstbohlen hat sich ein ebenes dreigliedriges Modell mit Schwabbelmassen, wie es in Abbildung 28 zu sehen ist, als geeignet erwiesen.

Das Modell besteht aus einem Rumpf, den beiden zusammengefaßten Oberschenkeln und den beiden zusammengefaßten Unterschenkeln. Alle drei Segmente bestehen aus je einem Knochen und einer Schwabbelmasse. Die Schwabbelmassen sind mit je zwei nicht-linearen, gedämpften Federn an den zugehörigen Knochen angekoppelt. Die Bohle wird durch einen Starrkörper modelliert, der eine effektive Masse nach Formel 65 besitzt. Das ganze System besteht also aus sieben Starrkörpern, von denen drei gelenkig miteinander verbunden sind.

Modellierung und Simulationsrechnungen sind mit *simsys* durchgeführt worden. Die Parameter für die Schwabbelmassenankopplung und die Bodenreaktionskraft zwischen Ferse und Bohle (entsprechend den Formeln 53, 55, 56) sind den im Anhang befindlichen Eingabedateien für *simsys* zu entnehmen.

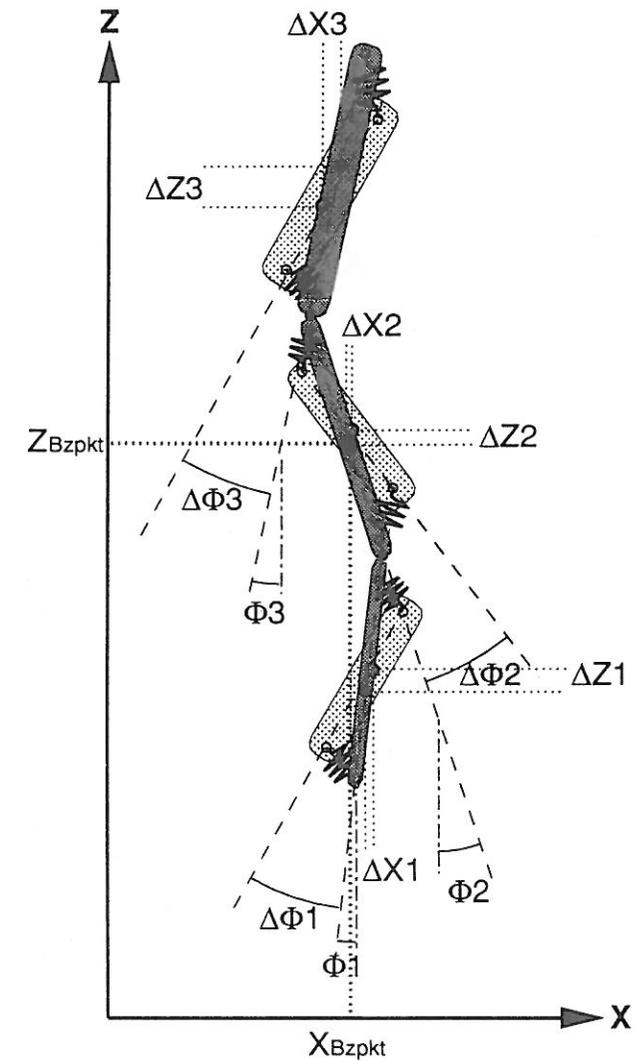


Abbildung 28: Für Niedersprünge auf Bohlen verwendetes dreigliedriges Modell

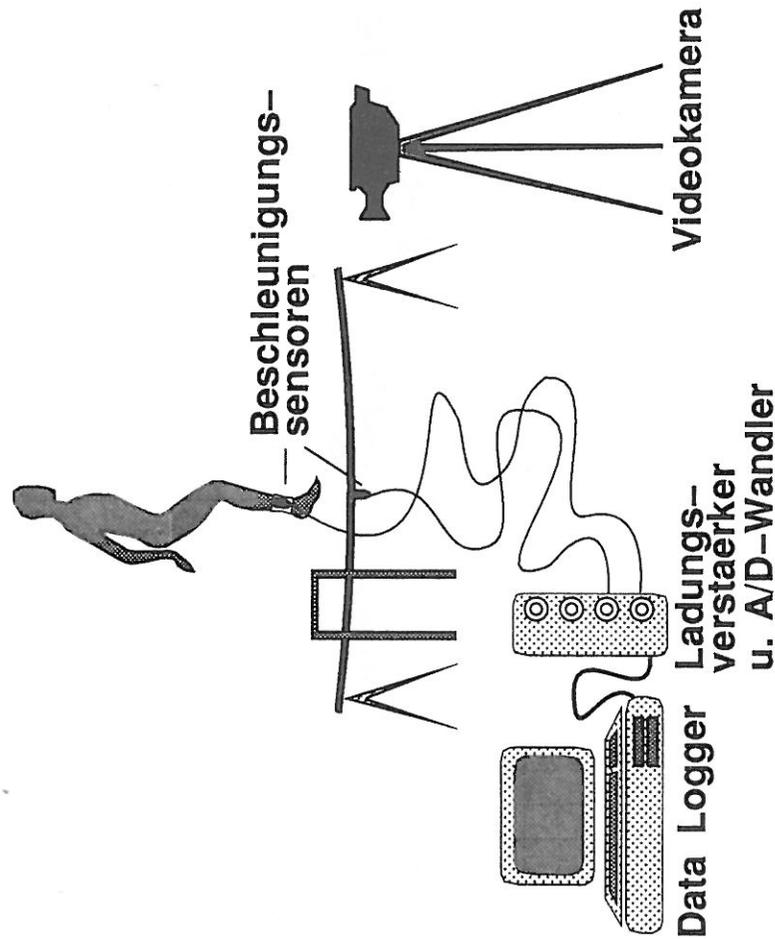


Abbildung 29: Versuchsaufbau für Niedersprünge eines Probanden auf eine federnde Gerüstbohle

Bei den Experimenten (siehe Abbildung 29) wurde eine Bohle mit den Abmessungen $0.28 \text{ m} \times 0.045 \text{ m} \times 2.00 \text{ m}$ verwendet, was mit $\rho = 470 \text{ kg/m}^3$ (Fichtenholz nach DIN 68364) eine effektive Bohlenmasse von 5.85 kg ergibt. Die Steigung der Kraft-Biege-Kennlinie einer solchen Bohle, die der Federhärte der im Modell verwendeten Feder entspricht, ist nach der Bernoullischen Balkentheorie (siehe [Budo, 1987])

$$k = \frac{48 EI}{l^3} \quad (78)$$

mit dem Flächenträgheitsmoment I für einen rechteckigen Balkenquerschnitt

$$I = \frac{1}{12} bd^3 \quad (79)$$

$$\Rightarrow k = \frac{4 Ebd^3}{l^3} \quad (80)$$

Das Elastizitätsmodul E für Fichtenholz ist nach DIN 1052: $E = 981 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ womit sich eine Federhärte von $k = 125 \text{ kN/m}$ ergibt.

Die Sprunghöhe betrug 0.3 m . Die Körperhaltung des Probanden im Augenblick des Auftreffens wurde anhand der Videoaufzeichnung ausgemessen, was die Winkel $\phi_{\text{Unterschenkel}} = -6^\circ$, $\phi_{\text{Oberschenkel}} = 27^\circ$, $\phi_{\text{Rumpf}} = -14^\circ$ ergab. Dies entspricht einer mäßig gebeugten Körperstellung, ähnlich derjenigen von Abbildung 28. Für die im weiteren durchgeführten Simulationen ist diese Körperhaltung angenommen worden.

Aufgezeichnet wurden die Beschleunigung am Sprunggelenk des Probanden in Längsrichtung des Unterschenkels und die Beschleunigung in der Mitte der Bohle in vertikaler Richtung. Nach Versuchen mit Aufzeichnungsraten bis zu $10000/\text{s}$ hat sich eine Rate von $1000/\text{s}$ als ausreichend erwiesen. Die Beschleunigungen wurden aufgezeichnet mit Accelerometern vom Typ „8606A100“ der Firma „Kistler“ mit einer Empfindlichkeit von circa 50 mV/g .

Die Landungen des Probanden auf der Bohle erfolgten auf die Ferse. Die Ergebnisse von solcherlei Landungen lassen sich leichter auf Abstürze aus verletzungsgefährlichen Höhen extrapolieren, wo ein weiches Abfangen der Landung auf den Ballen auch nicht mehr möglich ist, da die Ferse bei der Wucht des Aufpralls sofort durchschlägt. Der Proband trug bei den Versuchen Sicherheitsschuhe, wie sie auf Baustellen und in Fabriken getragen werden. Die Abbildungen 31 bis 38 zeigen die Meßergebnisse von acht Versuchen und im Vergleich dazu sind die Simulationsergebnisse in der Abbildung 39 gezeigt. Sehr schön wiedergegeben werden von der Simulation die Beschleunigungsmaxima der Bohle von etwa -500 m/s^2 und $+400 \text{ m/s}^2$ sowie der grobe Kurvenverlauf über das gesamte Zeitintervall. Auch die Dauer des Aufprallkraftstoßes von circa 8 ms wird gut wiedergegeben. Daß der Kurvenverlauf der Messung mehr Beschleunigungsspitzen aufweist (stärker „zappelt“) als die Simulation, liegt wahrscheinlich daran, daß die Modellierung der Bohle keine Oberschwingungen zuläßt. In der Realität treten diese aber mit Bestimmtheit auf. Hierfür spricht auch die Tatsache, daß die Spitzen in der Messung mit etwa doppelt so großer Frequenz auftreten wie in der Simulation und die erste Oberschwingung des beidseitig eingespannten Balkens die doppelte Frequenz der Grundschwingung besitzt.

Beim Vergleich der Beschleunigungswerte am Fuß ist zu berücksichtigen, daß die am Sprunggelenk gemessenen Beschleunigungen bei weitem nicht so zuverlässig sind, wie die an der Bohle gemessenen. Besondere Schwierigkeiten beim Messen von Beschleunigungen

am menschlichen Körper bereiten die Befestigungen der Accelerometer. Es ist nicht zu verhindern, daß die Accelerometer sich mit der Haut gegenüber dem Skelett verschieben können, was besonders bei stoßartigen Belastungen eine Quelle erheblicher Meßfehler ist. Um diesen Effekt möglichst gering zu halten, wurde das Accelerometer an eine Kunststoffmanschette geschraubt, die vom Sprunggelenk des Probanden abgeformt war um genauestmöglichen Paßsitz zu gewährleisten. Desweiteren wurde die Manschette nach dem Anlegen mit einem Steg aus Textilklebeband, unter der Ferse durch, nach unten vorgespannt, wie es in Abbildung 30 zu sehen ist. Die auf diese Art erzielte harte Ankopplung des Accelerometers an das Skelett erzeugt beim Auftreffen auf die Bohle allerdings ein Artefact. Durch die Verbreiterung des Fersenpolsters beim Aufprall bewirkt der Fersensteg an der Manschette einen Ruck nach unten. Der Beschleunigungsverlauf am Sprunggelenk weist daher ganz am Anfang eine Beschleunigungsspitze nach unten auf. Verzichtet man auf den Steg, so verschwindet diese Spitze in die falsche Richtung, aber die Ankopplung an das Skelett ist dann sehr lose und der Vergleich mit der Simulationsrechnung noch problematischer. Wegen der genannten meßtechnischen Schwierigkeiten bei Beschleunigungsmessungen am Körper, wurde bei der Parameteranpassung das Hauptaugenmerk auf die Messungen an der Bohle gerichtet. Trotzdem gibt die Simulationsrechnung die Maximalwerte der Beschleunigung am Fuß in positiver Richtung von etwa 300 m/s^2 recht gut wieder. Der Kurvenverlauf insgesamt ist in der Simulation ebenfalls zu erkennen, wenn auch nicht so deutlich wie bei der Bohle.

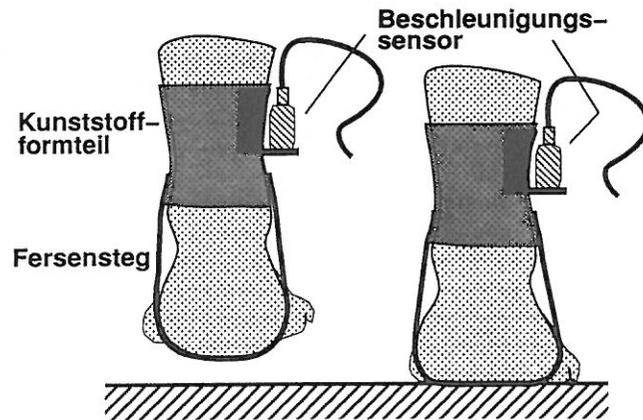


Abbildung 30: Befestigung des Accelerometers am Fuß des Probanden und Deformation der Ferse beim Aufprall

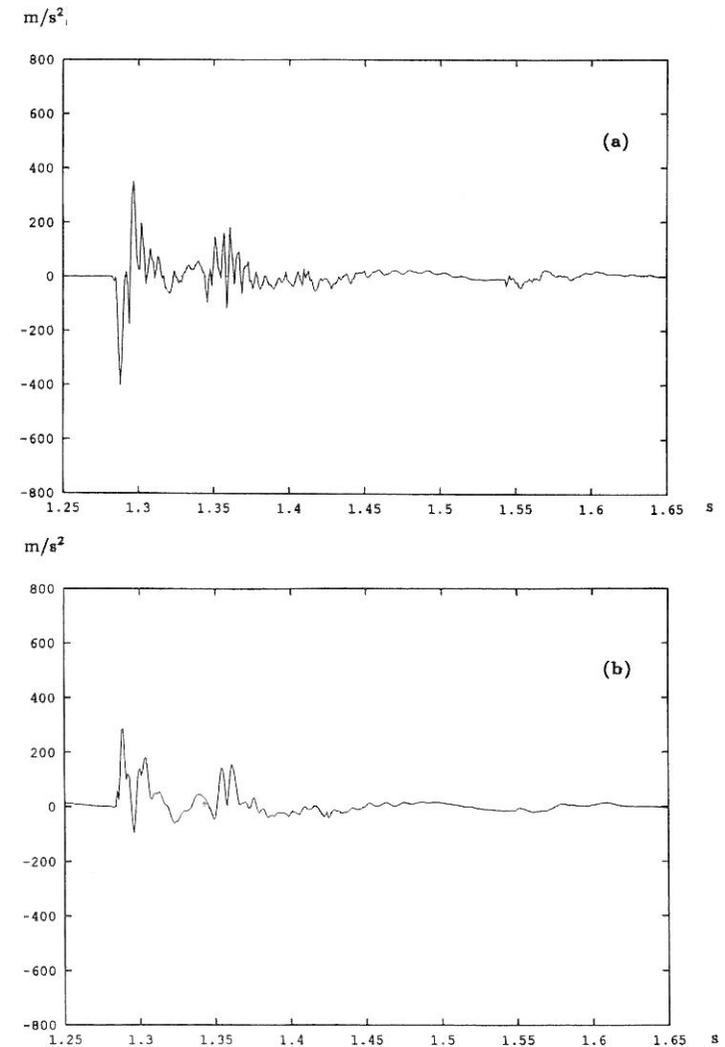


Abbildung 31: Beschleunigung gemessen beim Sprung eines Probanden aus 30 cm Höhe auf eine Gerüstbohle. a.) an der Bohle, b.) am Fuß

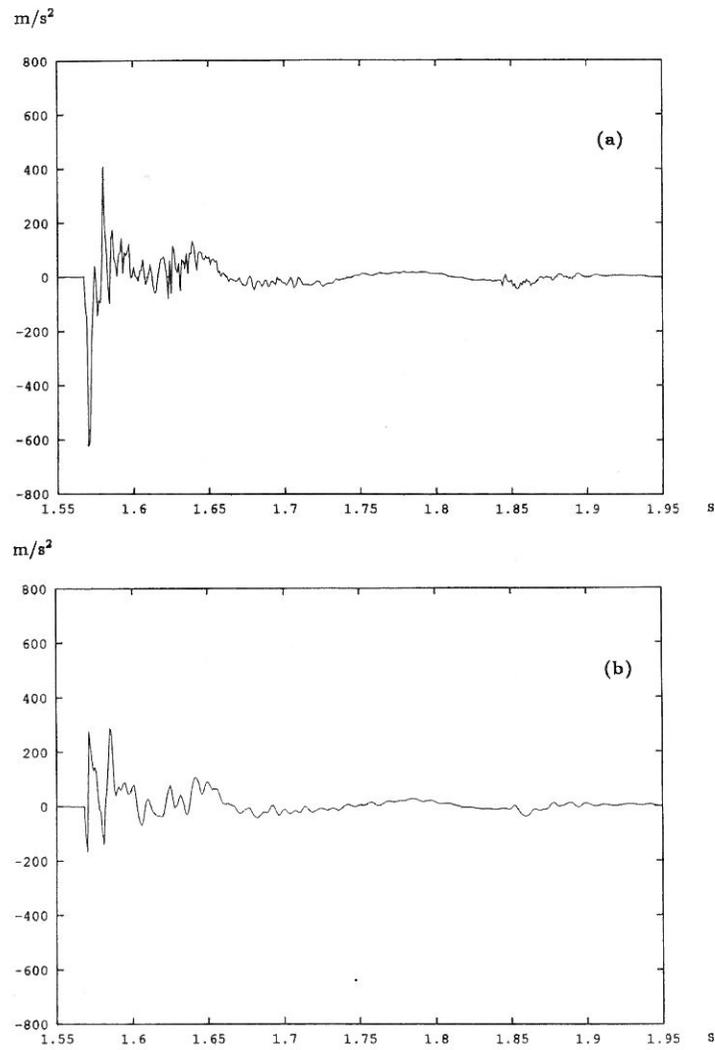


Abbildung 32: Beschleunigung gemessen beim Sprung eines Probanden aus 30 cm Höhe auf eine Gerüstbohle. a.) an der Bohle, b.) am Fuß

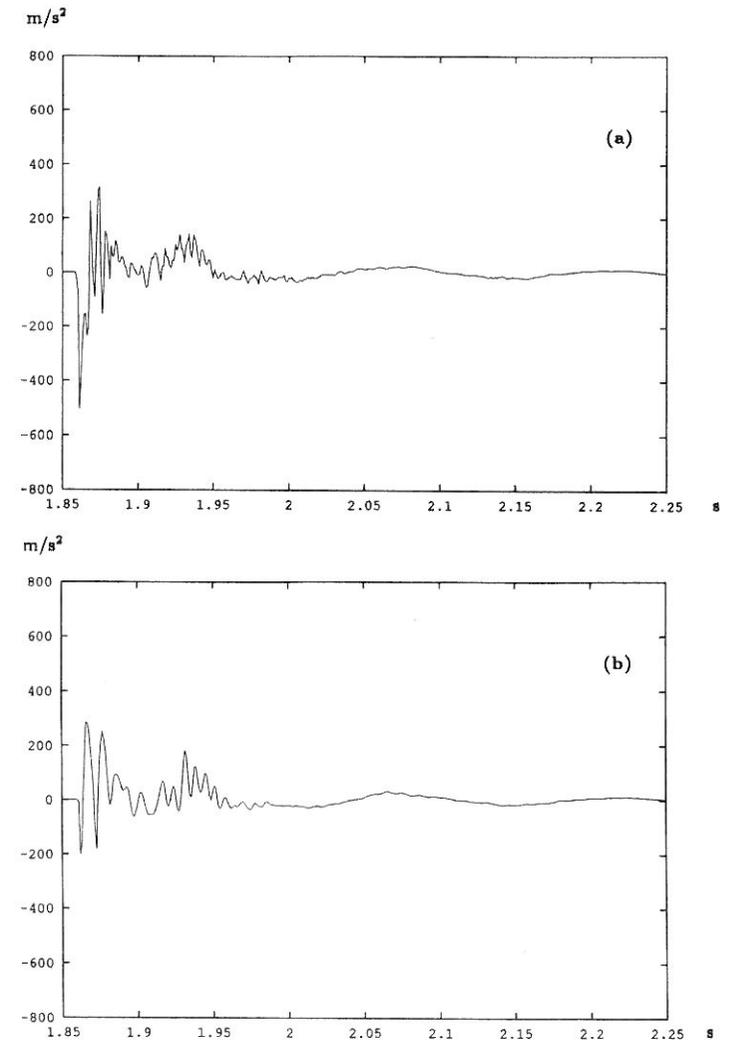


Abbildung 33: Beschleunigung gemessen beim Sprung eines Probanden aus 30 cm Höhe auf eine Gerüstbohle. a.) an der Bohle, b.) am Fuß

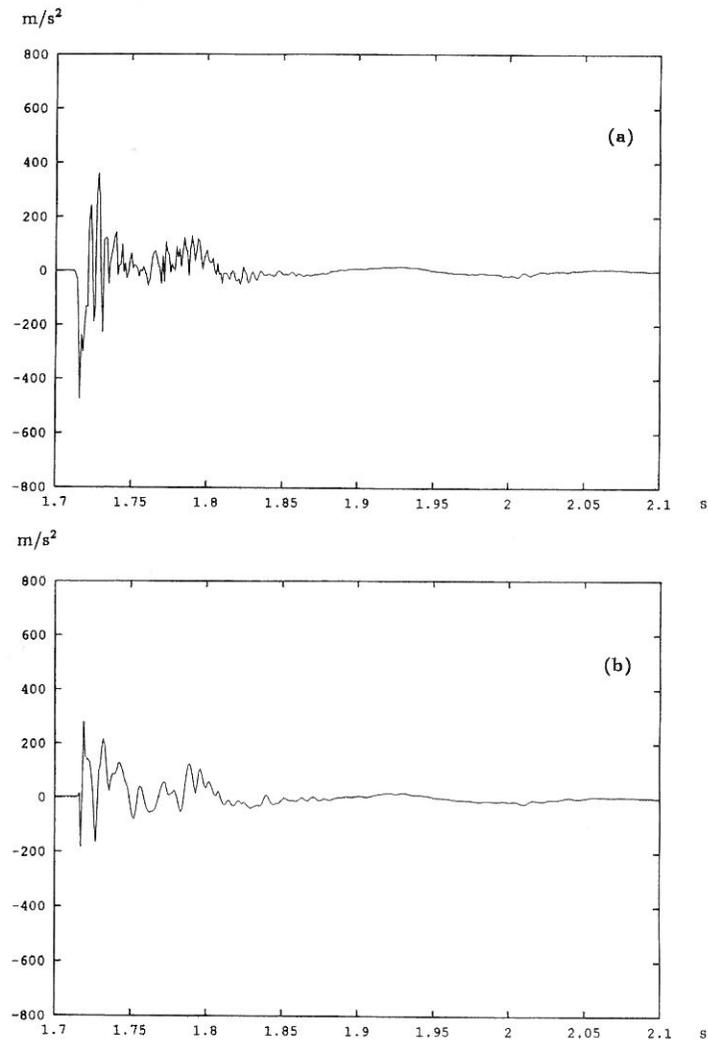


Abbildung 34: Beschleunigung gemessen beim Sprung eines Probanden aus 30 cm Höhe auf eine Gerüstbohle. a.) an der Bohle, b.) am Fuß

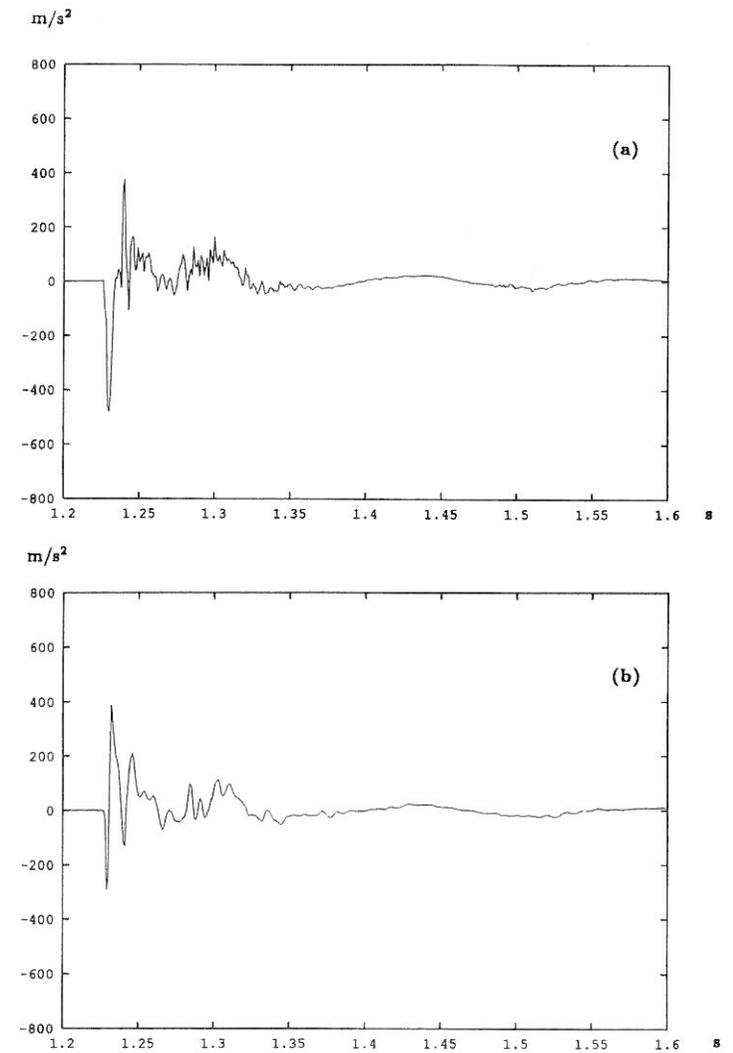


Abbildung 35: Beschleunigung gemessen beim Sprung eines Probanden aus 30 cm Höhe auf eine Gerüstbohle. a.) an der Bohle, b.) am Fuß

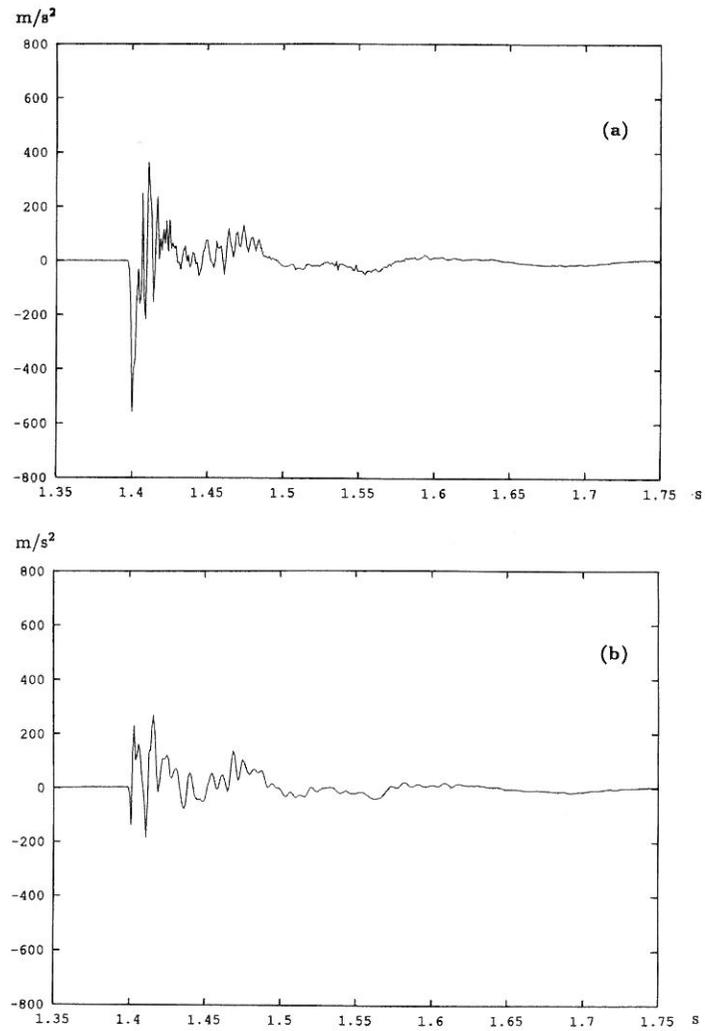


Abbildung 36: Beschleunigung gemessen beim Sprung eines Probanden aus 30 cm Höhe auf eine Gerüstbohle. a.) an der Bohle, b.) am Fuß

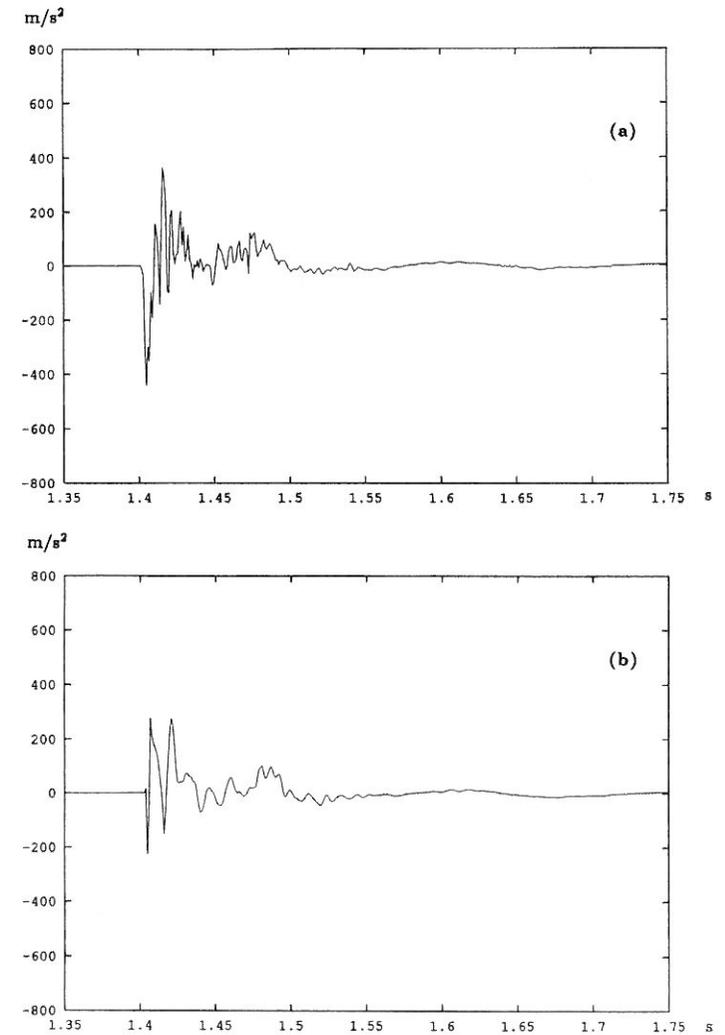


Abbildung 37: Beschleunigung gemessen beim Sprung eines Probanden aus 30 cm Höhe auf eine Gerüstbohle. a.) an der Bohle, b.) am Fuß

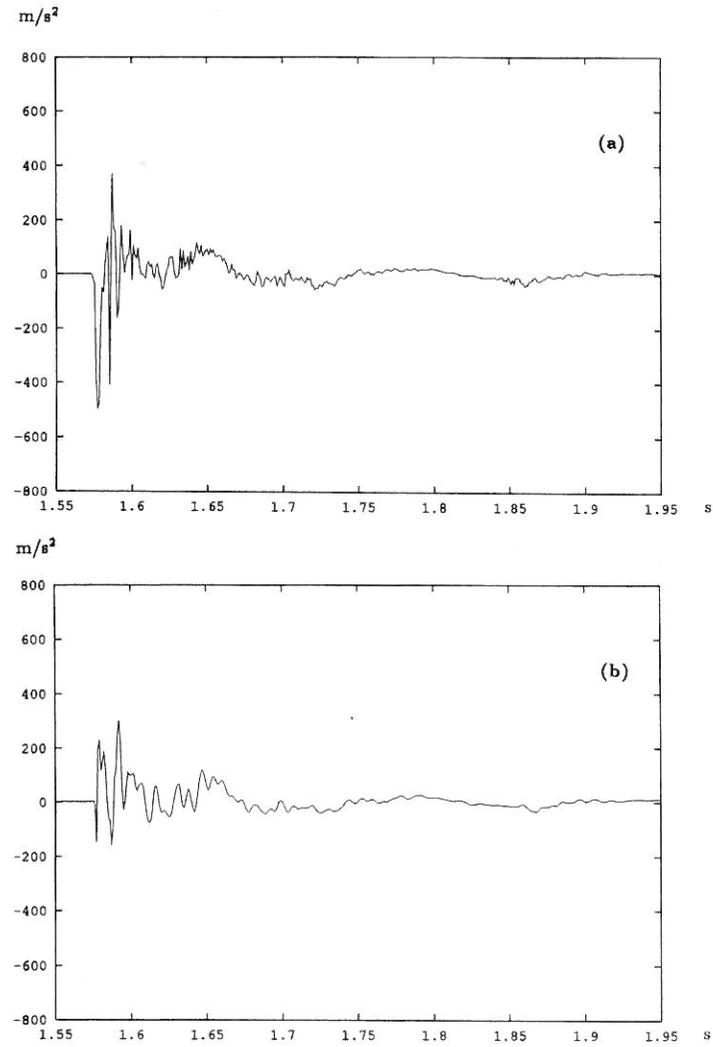


Abbildung 38: Beschleunigung gemessen beim Sprung eines Probanden aus 30 cm Höhe auf eine Gerüstbohle. a.) an der Bohle, b.) am Fuß

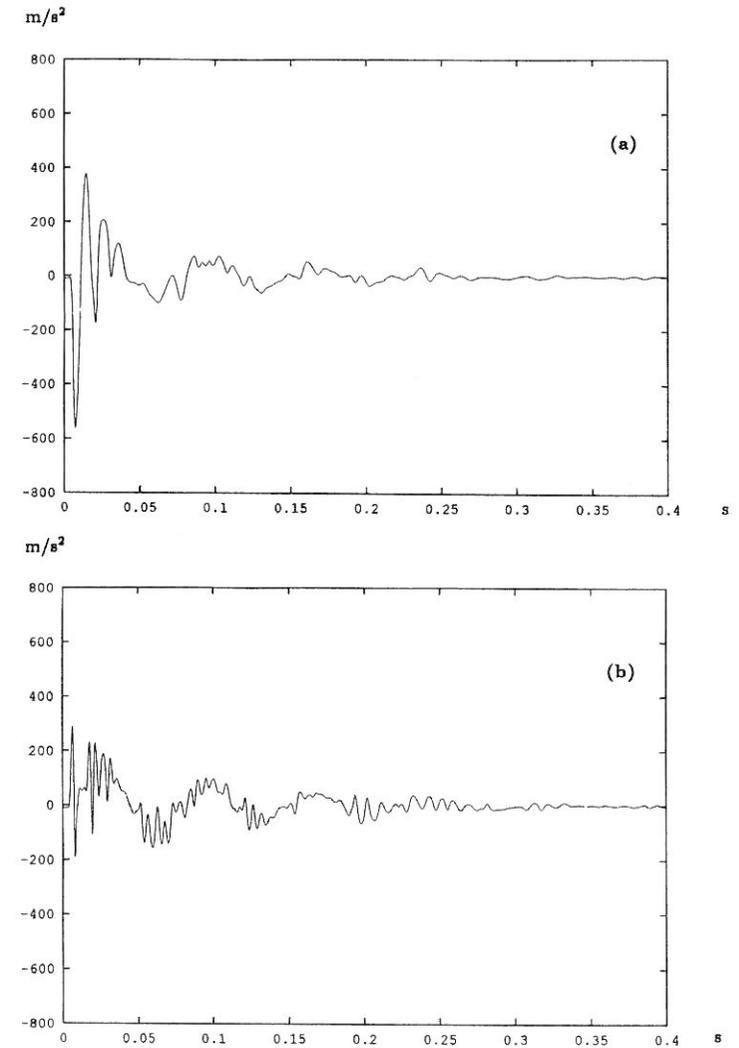


Abbildung 39: Mit Simulationsrechnung erhaltene Beschleunigungen für einen Sprung aus 30 cm Höhe auf eine Gerüstbohle. a.) an der Bohle, b.) am Fuß

4.3 Einfluß der Bohleneigenschaften auf die Stoßkräfte

Die beiden wesentlichen mechanischen Eigenschaften einer Bohle sind ihre Masse und ihre Kraft-Biege-Kennlinie. Da die Kraft-Biege-Kennlinie bis knapp unter die Bruchgrenze in guter Näherung linear ist, wie Abbildung 21 zeigt, kann man die Steigung der Kennlinie auch als Federkonstante der Bohle bezeichnen. Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie sich die Änderungen dieser beiden Größen auf die Stoßkräfte, also die Reaktionskräfte zwischen Bohle und Fuß auswirken. Hierzu wurde von einer Situation wie in Abschnitt 4.2 ausgegangen, mit einer Bohlenmasse von 5.8 kg und einer Bohlen-Federkonstanten von 125 kN/m sowie einer Sprunghöhe von 0.2 m.

In einer ersten Simulationsserie wurde die Federkonstante variiert. Zunächst wurde sie solange halbiert, bis der Grenzbereich erreicht war, wo die Rückstellkraft der Bohle gegenüber den Trägheitskräften beim Stoß vernachlässigbar ist. Das zeigt sich daran, daß eine weitere Reduzierung der Federkonstanten kaum noch eine Änderung des Kraftverlaufs bewirkt. Insbesondere die erste Kraftspitze läßt sich nicht weiter verringern. Diese würde selbst unter schwerelosen Bedingungen beim Aufprall auf eine frei schwebende Bohle auftreten. Bei den gegebenen elastischen Eigenschaften des dreigliedrigen Modells und einer Aufprallgeschwindigkeit von 1.98 m/s (Sprung aus 20 cm Höhe) sowie einer Bohlenmasse von 5.8 kg, kann diese Kraftspitze nicht unter einen Wert von 4200 N gesenkt werden.

Als nächster Schritt wurde die Federkonstante solange verdoppelt, bis der Grenzbereich erreicht war, wo die Bohle so unnachgiebig wird, daß ihre Auslenkung beim Stoß klein ist gegenüber der Deformation der Ferse. Dies entspricht dann einem Sprung auf festen ungefederten Boden (etwa Betonboden). Wiederum zeigt sich das Erreichen des Grenzbereichs an einem sich kaum noch ändernden Kraftverlauf bei weiterer Steigerung der Federhärte. Die Serie der Simulationen mit variiertem Federhärte ist in den Abbildungen 40 bis 42 dargestellt.

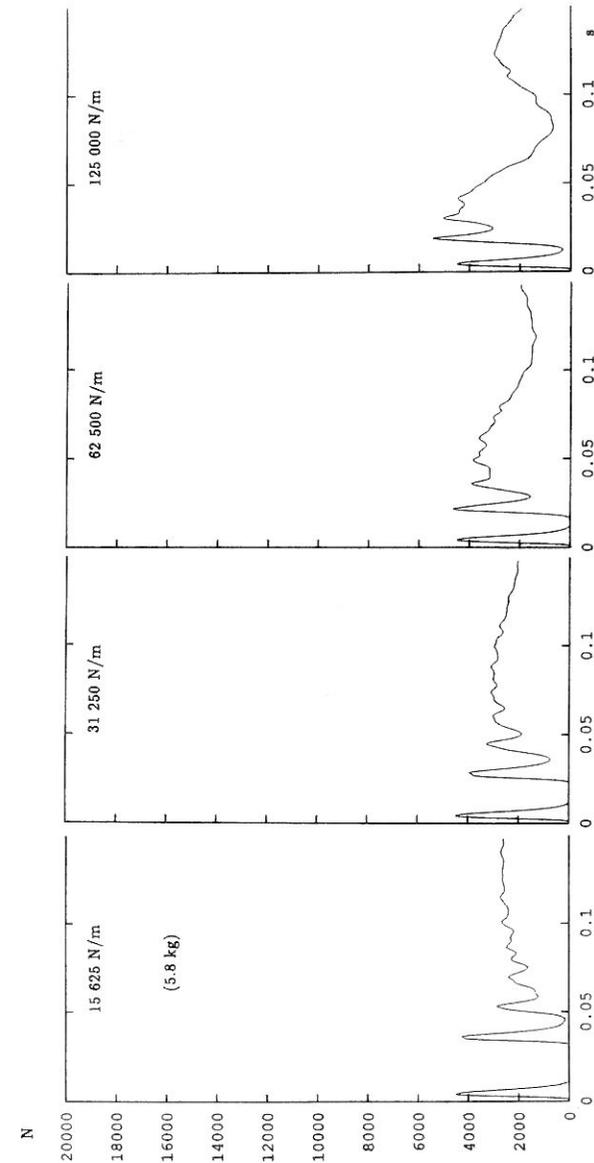


Abbildung 40: Verläufe der Bodenreaktionskraft bei unterschiedlichen Federhärten der Bohle (Sprunghöhe 0.2 m).

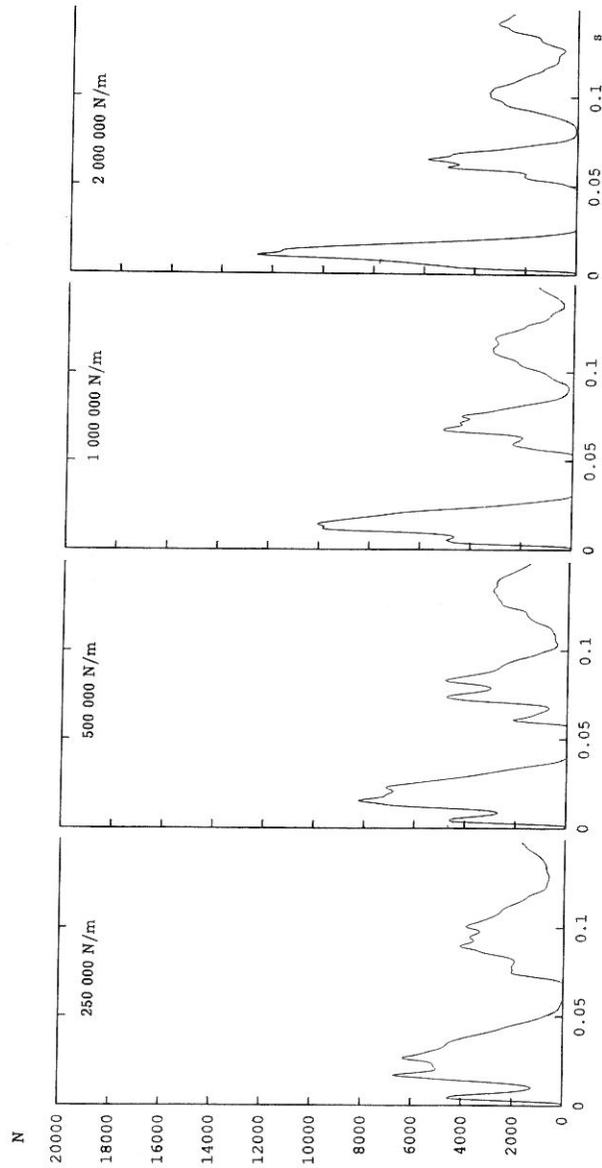


Abbildung 41: Verläufe der Bodenreaktionskraft bei unterschiedlichen Federhärten der Bohle (Sprunghöhe 0.2 m).

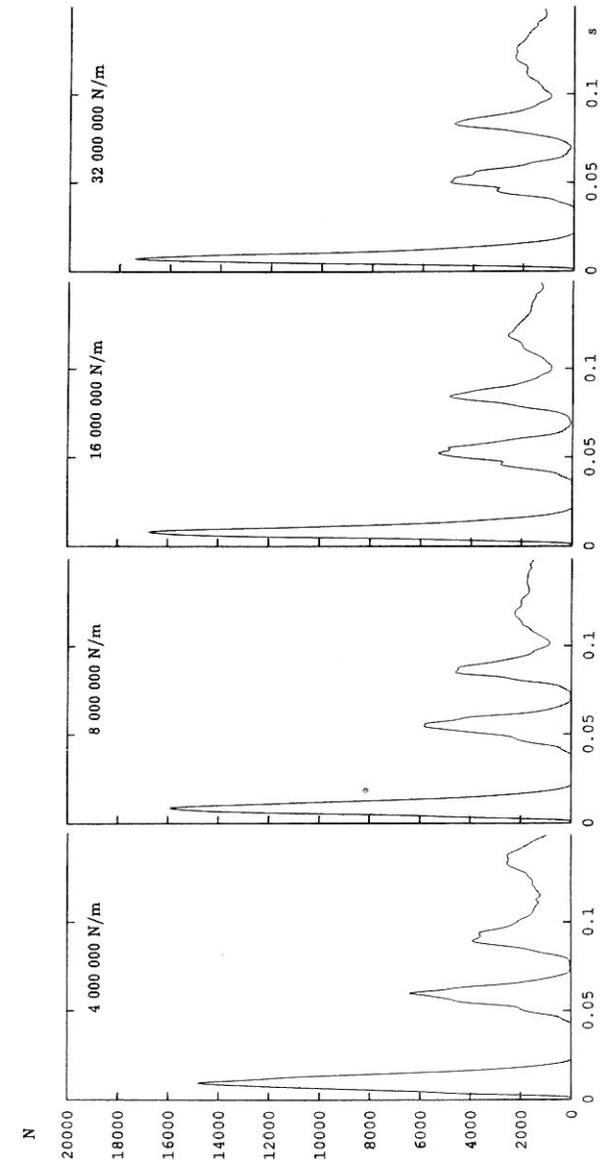


Abbildung 42: Verläufe der Bodenreaktionskraft bei unterschiedlichen Federhärten der Bohle (Sprunghöhe 0.2 m).

In einer zweiten Serie wurde die Bohlenmasse variiert. Diese Serie ist in den Abbildungen 43 bis 45 dokumentiert. Bei sehr großer Bohlenmasse hat man wieder den Grenzfall eines Sprungs auf harten Boden, da beim Stoß die Bohle wegen ihrer Trägheit auf der Stelle verharrt, wenn ihre Masse gegen unendlich geht. Das bedeutet, daß im Falle einer sehr großen Masse sich derselbe Reaktionskraftverlauf ergeben müßte wie bei einer sehr harten Federkonstanten. Der Vergleich der entsprechenden Kurven in den Abbildungen 45 und 42 bestätigt dies.

Geht die Masse der Bohle gegen Null, liegt der Grenzfall einer masselosen Feder vor. Die Kraftspitze, die beim Stoß die jähe Beschleunigung der ruhenden Masse bewirkt verschwindet dann. Die erste Kraftspitze, die einfach das Resultat des Stoßes zweier massebehafteter Körper ist, läßt sich also durch die Massenreduzierung der Bohle beliebig verkleinern. Die Reaktionskraft ist dann ausschließlich die Rückstellkraft der Feder. In der Realität sind diese Verhältnisse beim Sprung in ein Sprungtuch oder ein Auffangnetz näherungsweise gegeben. Eine Verringerung der Stoßkraftspitze durch Massenreduzierung bringt allerdings nur solange einen zusätzlichen Verletzungsschutz wie die Stoßkraftspitze wesentlich höher liegt, als die sich anschließenden Kraftmaxima.

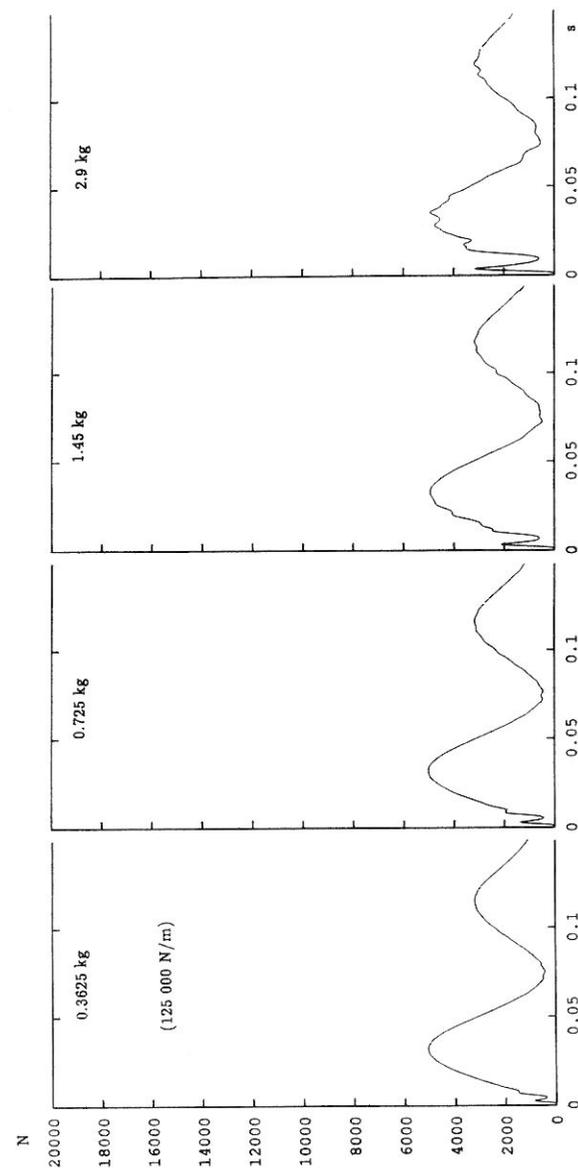


Abbildung 43: Verläufe der Bodenreaktionskraft bei unterschiedlichen Massen der Bohle (Sprunghöhe 0.2 m).

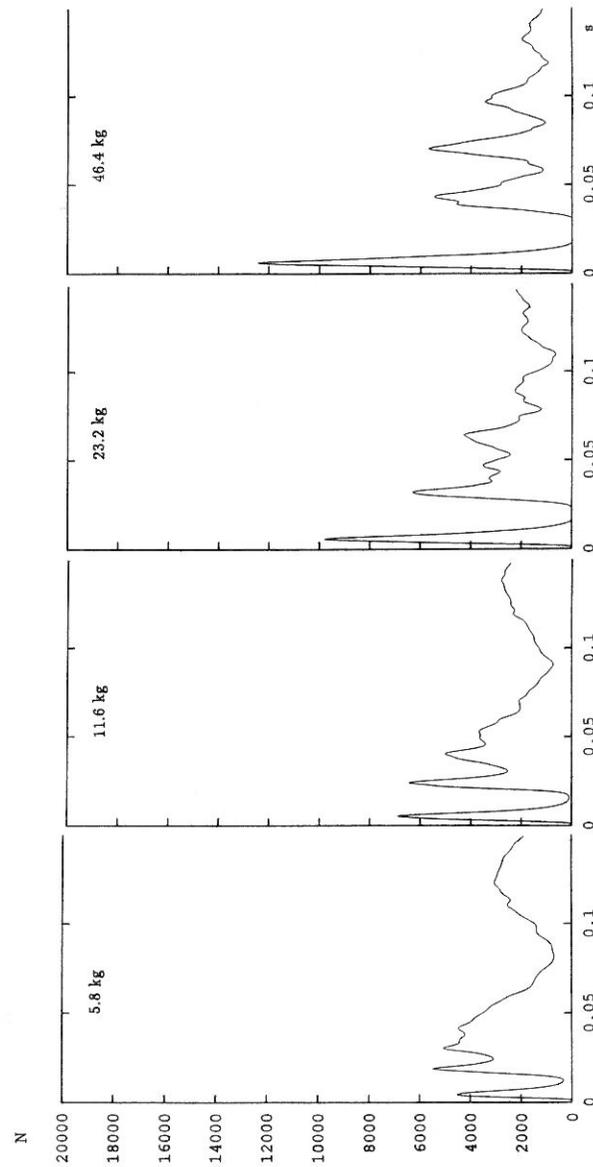


Abbildung 44: Verläufe der Bodenreaktionskraft bei unterschiedlichen Massen der Bohle (Sprunghöhe 0.2 m).

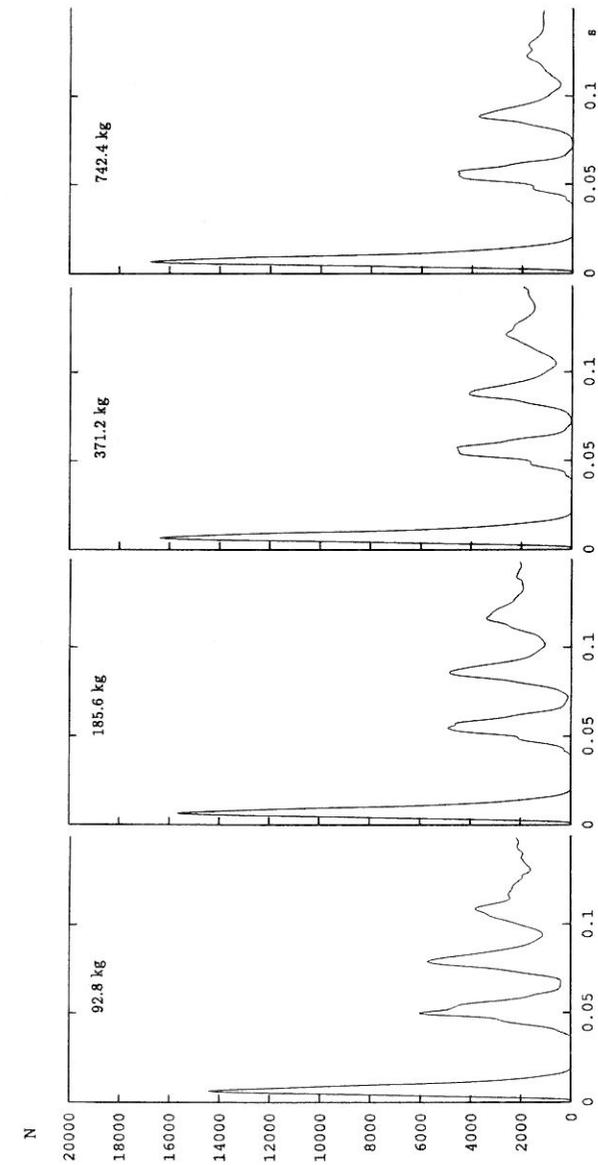


Abbildung 45: Verläufe der Bodenreaktionskraft bei unterschiedlichen Massen der Bohle (Sprunghöhe 0.2 m).

Um nun die Abhängigkeit der auf den Menschen einwirkenden maximalen Reaktionskraft bei Abstürzen aus der verletzungsgefährlichen Höhe von 4 m zu erörtern, wurden dieselben Simulationen, die zu den Ergebnissen der Abbildungen 40 bis 45 führten mit der entsprechend höheren Aufprallgeschwindigkeit von 8.86 m/s gerechnet.

Wieder wurde bei festgehaltener Bohlenmasse von 5.8 kg die Federhärte zwischen den beiden geschilderten Grenzfällen variiert und die in den Simulationen auftretenden maximalen Reaktionskräfte gegen die Federhärte aufgetragen. Das Resultat ist in Abbildung 46 zu sehen. Bei sehr hohen Federkonstanten ($> 10^8$ N/m) geht die Maximalkraft asymptotisch gegen die beim Sturz auf festen Boden entstehende Maximalkraft von etwa 110 kN. Am anderen Ende der Skala bei kleinen Federkonstanten ($< 10^6$ N/m) ist die Maximalkraft immer durch die Stoßkraftspitze der aufeinanderprallenden Massen gegeben und bleibt unabhängig von der Federhärte konstant bei 29 kN.

Trägt man bei festgehaltener Federhärte von 125 kN/m die maximale Reaktionskraft gegen die variierte Bohlenmasse auf, so ergibt sich das Diagramm in Abbildung 47. Bei großen Massen ergibt sich wieder ein asymptotischer Verlauf gegen den Grenzwert von 110 kN beim Sturz auf festen Boden. Im Bereich der Bohlenmassen von weniger als 2 kg ist die Stoßkraftspitze kleiner als die nachfolgenden im wesentlichen von der Bohlen-Federkonstanten abhängigen Kraftmaxima. In diesem Bereich ist die Maximalkraft also unabhängig von der Masse und liegt bei circa 16 kN.

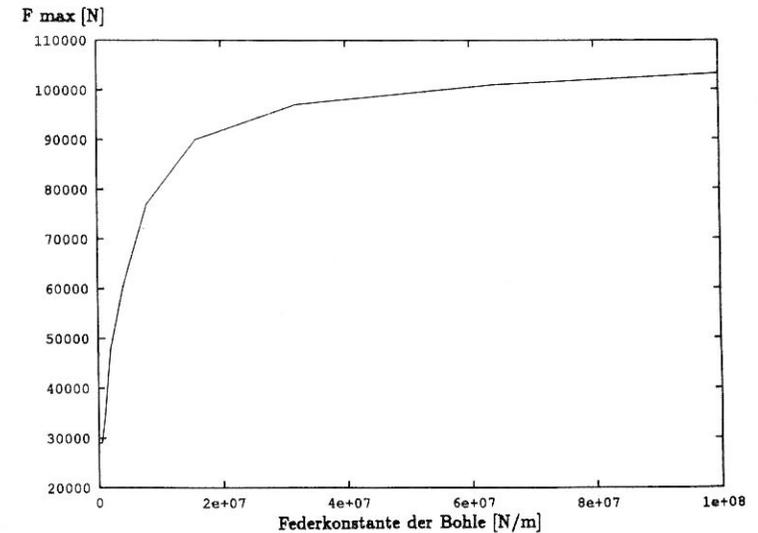


Abbildung 46: Reaktionskraftmaxima in Abhängigkeit von der Federhärte der Bohle (Bohlenmasse 5.8 kg, Absturzhöhe 4 m).

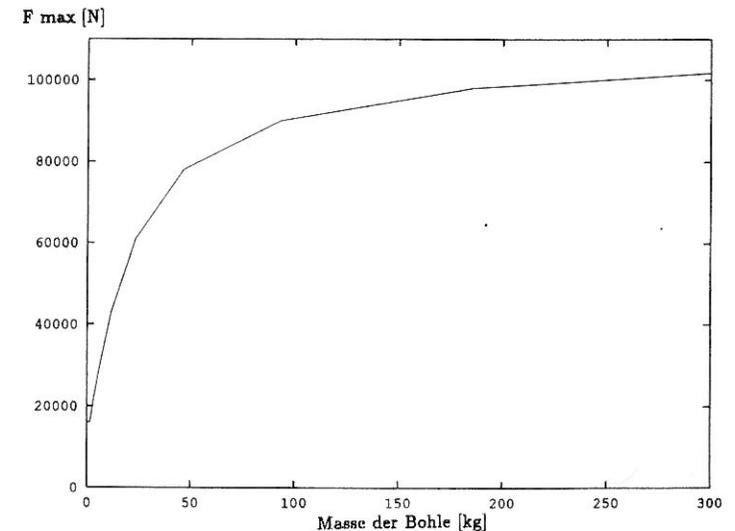


Abbildung 47: Reaktionskraftmaxima in Abhängigkeit von der Bohlenmasse (Federhärte 125 kN/m, Absturzhöhe 4 m).

Die Diagramme in den Abbildungen 46 und 47 stellen Schnitte durch den Graphen der Funktion $F_{\max}(\text{Masse, Federkonstante})$ dar. Für die Optimierung von Auffangvorrichtungen ist das Gebiet kleiner Massen und Federkonstanten interessant, da hier die kleinsten Kräfte auftreten und damit auch das Verletzungsrisiko am kleinsten ist. Deshalb wurden für diesen Bereich die Funktionswerte für Massen zwischen 0.5 kg und 1.5 kg sowie für Federkonstanten zwischen 10 kN/m und 100 kN/m in einem Raster von 11×10 per Simulation ermittelt. Die Absturzhöhe wurde wieder mit 4 m angenommen. Abbildung 48 zeigt den Graphen von F_{\max} in diesem Bereich. Er weist etwa entlang der Diagonalen von rechts vorn nach links hinten einen Knick auf. Rechts von diesem Knick sind die Reaktionskraftmaxima von der Stoßkraftspitze bestimmt, während sie links davon durch die Rückstellkraft der Bohle entstehen. Dementsprechend ist F_{\max} rechts des Knicks nur massenabhängig und auf der linken Seite von kleinen Schwankungen abgesehen nur abhängig von der Federhärte.

In der Praxis kann die Federhärte nicht beliebig verringert werden, wenn ein Gerüstbelag nicht nur als Auffangvorrichtung, sondern auch als Arbeitsplattform dient und deshalb nicht zu weich federn darf. Ein Minimum der Federhärte ist dann vorgegeben. In diesem Fall kann das Verletzungsrisiko bei Abstürzen nur dadurch weiter gesenkt werden, daß man bei der akzeptablen minimalen Federhärte die Masse bis zum Erreichen des Knicks der Funktion $F_{\max}(\text{Masse, Federkonstante})$ reduziert. Eine solche Massenreduzierung bei weiterhin ausreichender Bruchfestigkeit des Gerüstbelags ist allerdings nur durch die Verwendung teurerer Werkstoffe zu realisieren.

Grundsätzlich sind auf jeden Fall Auffangnetze vorzuziehen, welche eine geringe Masse mit weichen (allerdings nichtlinearen) Federeigenschaften und ausreichender Bruchfestigkeit vereinigen.

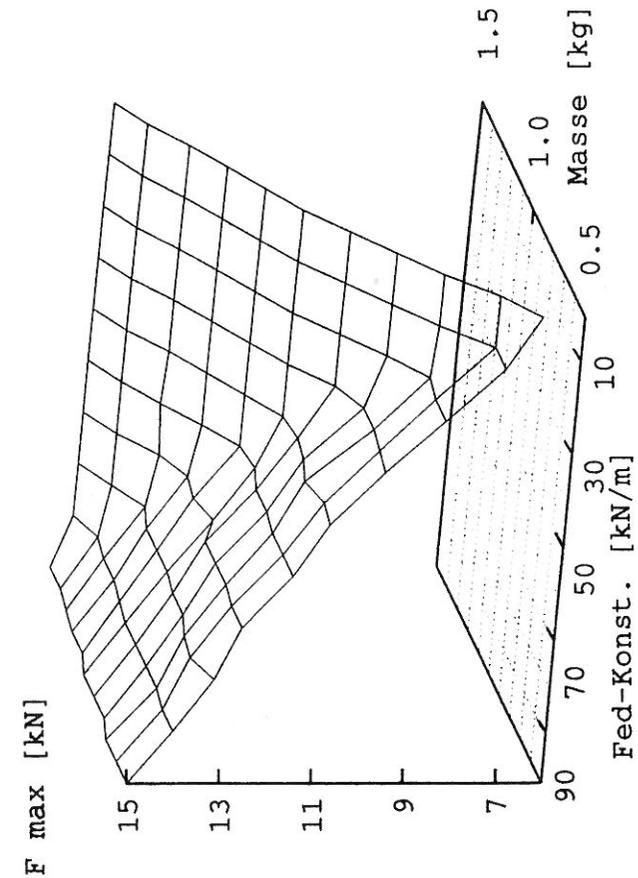


Abbildung 48: Reaktionskraftmaxima in Abhängigkeit von der Bohlenmasse und der Federhärte der Bohle (Absturzhöhe 4 m).

4.4 Einfluß der Schwabbelmassen auf die Stoßkräfte

Der Effekt, den die Schwabbelmassen auf die Bodenreaktionskräfte ausüben wurde durch Simulation von Sprüngen aus 20 cm Höhe auf festen Boden und Sprüngen aus 20 cm und 4m Höhe auf eine Bohle untersucht. Die Federhärte der Bohle wurde mit 450 kN/m und ihre effektive Masse mit 3.8 kg angenommen. Dies entspricht einer Fichtenholzbohle mit den Abmessungen 0.045 m × 0.28 m × 1.3 m. Alle Sprünge wurden einmal mit dem Schwabbelmassenmodell von Abbildung 28 und einmal mit einem Modell gerechnet, bei dem die gesamte Masse in die drei Knochen gesteckt wurde. Es ergeben sich sechs Fälle:

1. Sprunghöhe 0.2 m auf festen Boden mit Schwabbelmassen,
2. Sprunghöhe 0.2 m auf Bohle mit Schwabbelmassen,
3. Sprunghöhe 4 m auf Bohle mit Schwabbelmassen,
4. Sprunghöhe 0.2 m auf festen Boden, gesamte Masse im Skelett,
5. Sprunghöhe 0.2 m auf Bohle, gesamte Masse im Skelett,
6. Sprunghöhe 4 m auf Bohle, gesamte Masse im Skelett.

Die Reaktionskraftverläufe dieser sechs Fälle sind in derselben Nummerierung in Abbildung 49 dargestellt.

Beim Sprung auf den Boden zeigt sich ein ganz erheblicher Unterschied zwischen der Modellierung mit und ohne Schwabbelmassen. Die Kraftspitze erreicht beim „Skelettmodell“ einen Wert von 12900 N, während der Spitzenwert beim Schwabbelmassenmodell nur 7000 N erreicht, was bedeutet, daß das „Skelettmodell“ einen Fehler von 84 % erzeugt. Dies deckt sich gut mit der Abschätzung aus Kapitel 3, nach der die Reaktionskraft ohne Schwabbelmassen-Modellierung um den Faktor zwei zu groß berechnet wird.

Einen geringeren Effekt haben die Schwabbelmassen bei Sprüngen auf die federnde Bohle. Für die Sprunghöhe 20 cm ergeben sich die Maximalkräfte beim Schwabbelmassenmodell und beim „Skelettmodell“ zu 5800 N beziehungsweise 7200 N. Der Fehler beträgt also 24 %. Bei der Sprunghöhe 4 m nimmt der Schwabbelmasseneffekt nochmals etwas ab. Die Kraftspitzen betragen 26800 N und 29400 N, was einem Fehler des „Skelettmodells“ von 9.7 % gleichkommt.

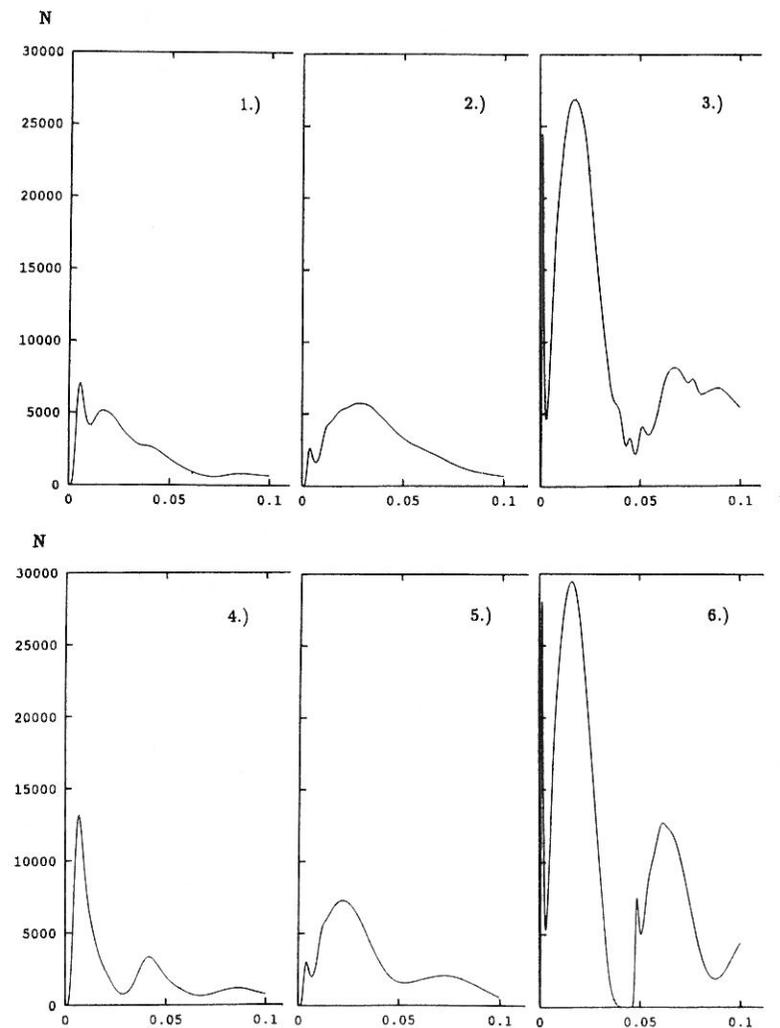


Abbildung 49: Reaktionskraftverläufe gerechnet mit Schwabbelmassen für Sprung aus 0.2 m Höhe auf festen Boden 1.), aus 0.2 m auf Bohle 2.) und aus 4 m auf Bohle 3.). Die analogen Fälle 4.), 5.), 6.) sind ohne Schwabbelmassen gerechnet.)

4.5 Untersuchungen zur dynamischen Belastbarkeit von Gerüstbohlen

4.5.1 Bohlenbelastung durch einen abstürzenden Menschen

Bei einem an beiden Enden drehbar gelagerten Balken der Länge l , der Breite b und der Dicke d , welcher in der Mitte belastet wird, besteht nach der Bernoullischen Theorie (siehe [Budo, 1987]) folgender Zusammenhang zwischen der im Balken auftretenden Spannung σ und der Last F :

$$\sigma = \frac{3}{2} \frac{l-x}{b d^2} F \quad (81)$$

Dabei ist x die Entfernung von der Balkenmitte. Die maximale Spannung σ_{\max} tritt also in der Balkenmitte bei $x = 0$ auf und beträgt

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2} \frac{l}{b d^2} F \quad (82)$$

Die Last F erzeugt eine Bohlenauslenkung $s = k \cdot F$ mit der Konstanten k aus Gleichung 78. Setzt man dies in Gleichung 82 ein, so erhält man den Zusammenhang zwischen der maximalen Spannung und der Bohlenauslenkung.

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2} \frac{l}{b d^2} k s \quad (83)$$

Nach DIN 1052 ist für die statische Beanspruchung von Bauhölzern eine maximale Spannung von $\sigma_{DIN} = 2.7 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ zugelassen. Die Bruchspannung für Fichtenholz liegt nach [BIA-Report, 1984] bei $\sigma_{Bruch} = 4.9 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$.

Um nun die Frage zu klären, wie die Fallhöhen, bei denen die Spannungswerte σ_{DIN} und σ_{Bruch} auftreten, von der Bohlenstützweite abhängen wurde folgendermaßen vorgegangen: Für die gängigsten Bohlenquerschnitte $0.24 \text{ m} \times 0.045 \text{ m}$ und $0.28 \text{ m} \times 0.045 \text{ m}$ wurden durch Simulationsrechnungen mit jeweils drei verschiedenen Körperstellungen Fallhöhen-Stützweiten-Diagramme erzeugt. Die Diagramme enthalten die Kurven sowohl für die Bruchfallhöhen, als auch für diejenigen Höhen, bei denen σ_{DIN} auftritt.

Als Körperhaltungen wurden zum einen eine sehr aufrechte, gestreckte und zum andern eine Stellung ausgewählt, bei der eine Landung auf das Gesäß erfolgt. Um nicht nur diese beiden schlimmsten Fälle zu betrachten, wurde noch eine gemäßigt gebeugte dritte Variante mit Landung auf den Füßen hinzugenommen. Die Krafteinleitung in das Brett erfolgte punktförmig. Die Gesamtmasse des Modells betrug 100 kg.

Die Bruchfallhöhe und die Fallhöhe bei der σ_{DIN} auftritt wurden nun durch Intervallschachtelung bestimmt: Ausgehend von einer Anfangshöhe von 5 m oder 10 m wurden Abstürze simuliert und nach jedem Simulationslauf überprüft, ob die maximal auftretende Bohlenauslenkung zur Überschreitung eines der beiden Spannungswerte führt. Im positiven Fall wurde das oberhalb der momentanen Fallhöhe liegende Intervall halbiert, im negativen Fall das darunter liegende. Auf diese Weise ist mit neun bis zehn Schachtelungen die interessierende Fallhöhe auf weniger als 2 cm genau bestimmt. Eine solche Fallhöhenbestimmung wurde für Stützweiten zwischen 0.3 m und 5 m in 10 cm-Schritten durchgeführt.

Die sich ergebenden sechs Diagramme (zwei Bohlenquerschnitte bei drei Körperhaltungen) sind dargestellt in den Abbildungen 50 bis 53. Zusätzlich sind noch für jeden Bohlenquerschnitt die Kurven dargestellt, die sich durch Mittelung über die Kurven der drei

Körperhaltungen ergeben. Beispiele von Abstürzen mit den drei verschiedenen Körperhaltungen sind in Abbildung 54 gegeben.

Die Kurven können natürlich nicht schön glatt verlaufen, weil mit der Variation der Fallhöhe und der Bohlenstützweite, welche Einfluß auf Federhärte und effektive Masse der Bohle hat, sich ständig die Bedingungen beim Aufprall ändern. Je nach Federeigenschaften und Masse des Bretts hebt zum Beispiel der Fuß nach dem Aufprall kurzfristig wieder von der Bohle ab. Oder aber Knie, Gesäß oder Kopf schlagen in einigen Fällen auf die Bohle auf, in anderen jedoch nicht.

4.5.2 Bohlenbelastung bei Kugelfallexperimenten

In [BIA-Report, 1984] sind experimentell bestimmte Bruchfallhöhen für Fichtenbohlen mit den Querschnitten $0.28 \text{ m} \times 0.04 \text{ m}$ und $0.28 \text{ m} \times 0.05 \text{ m}$ im Stützweitenbereich von 0.7 m bis 3.7 m angegeben. Diese Daten sind mit Hilfe von Kugelfallexperimenten der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Art erstellt worden. Als Prüfkugel diente eine Stahlkugel mit der Masse 100 kg.

Mit der analytischen Lösung der Bewegungsgleichungen 75 für das Modell der Kugelfallexperimente (Abbildung 19) wurde nun versucht, diese Meßwerte zu reproduzieren. Dazu wurde die Lösung für den Zeitraum von einer Sekunde nach dem Auftreffen der Kugel bei einer bestimmten Stützweite berechnet. Durch Bohlenquerschnitt und Stützweite sind die Masse und die Federhärte der Bohle gegeben. Aus der maximalen Bohlenauslenkung wurde dann die größte in der Bohle auftretende Spannung errechnet. In dem durch Messwerte abgedeckten Stützweitenbereich sind die kritischen Fallhöhen für σ_{Bruch} und σ_{DIN} dann wieder durch Intervallschachtelung der Fallhöhe auf $\pm 5 \text{ cm}$ genau bestimmt worden.

Die sich ergebenden kritischen Fallhöhen sind gemeinsam mit den Meßwerten in den Diagrammen der Abbildung 55 eingetragen. Die errechneten Bruchfallhöhen liegen für das gesamte untersuchte Stützweitenintervall recht gut im Bereich der experimentellen Werte. Ebenfalls befriedigend ist, daß sämtliche gemessenen Bruchfallhöhen oberhalb der Kurven für σ_{DIN} liegen.

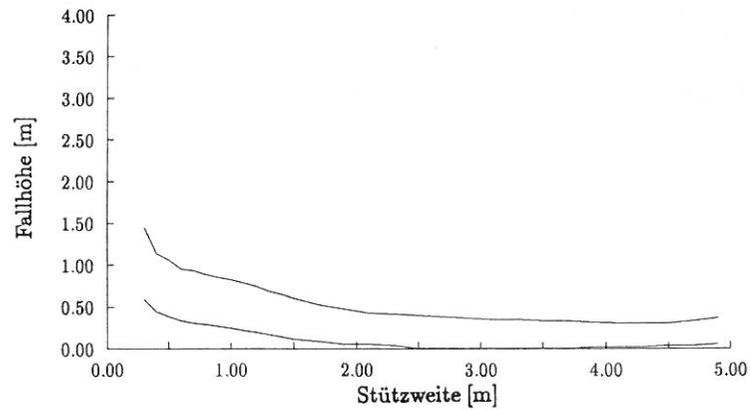
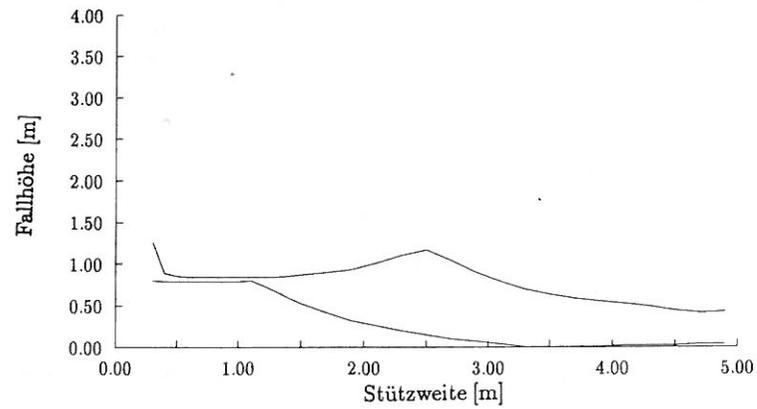


Abbildung 50: Fallhöhen-Stützweiten-Diagramm, berechnet mit einem dreigliedrigen Modell der Masse 100 kg. Bohlenquerschnitt 0,24 m x 0,045 m.
Oben: Körperhaltung A, unten: Körperhaltung B.

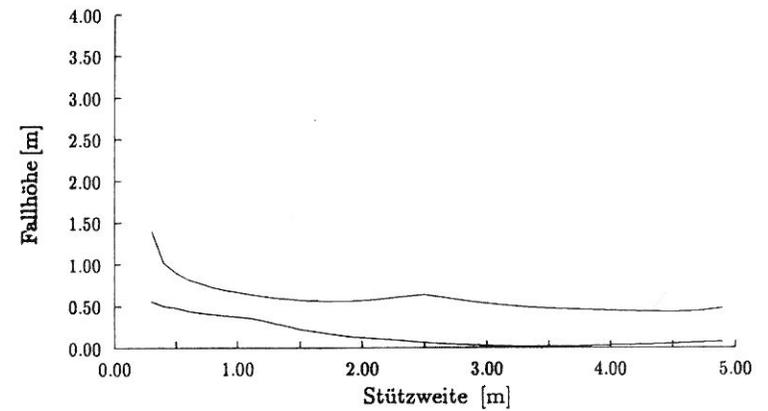
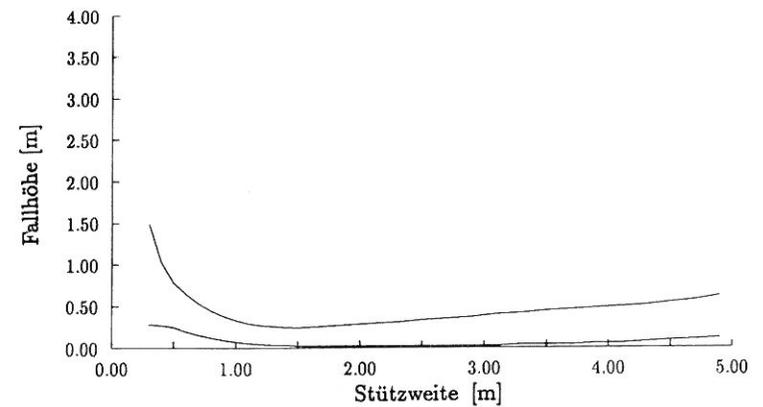


Abbildung 51: Fallhöhen-Stützweiten-Diagramm, berechnet mit einem dreigliedrigen Modell der Masse 100 kg. Bohlenquerschnitt 0,24 m x 0,045 m.
Oben: Körperhaltung C, unten: Mittelung über A, B und C.

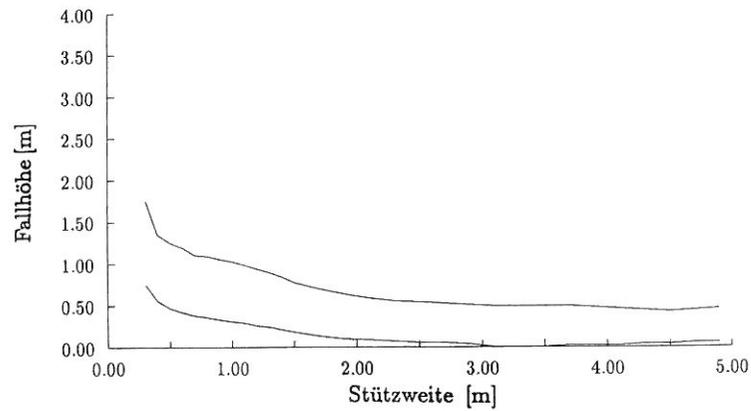
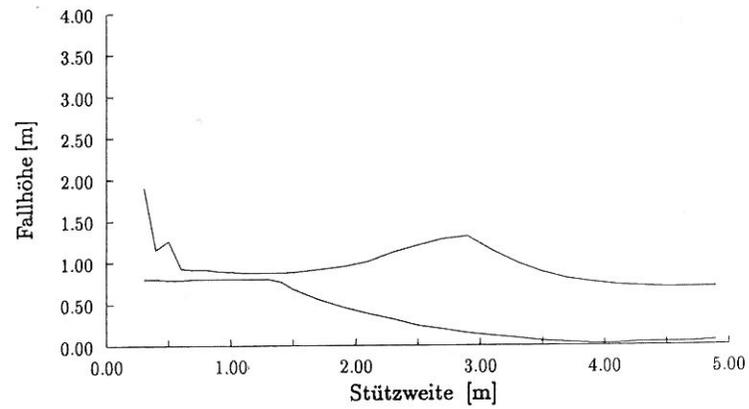


Abbildung 52: Fallhöhen-Stützweiten-Diagramm, berechnet mit einem dreigliedrigen Modell der Masse 100 kg. Bohlenquerschnitt 0,28 m x 0,045 m. Oben: Körperhaltung A, unten: Körperhaltung B.

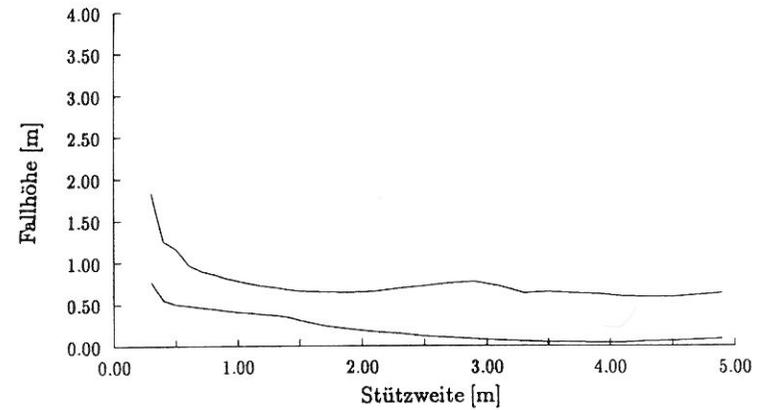
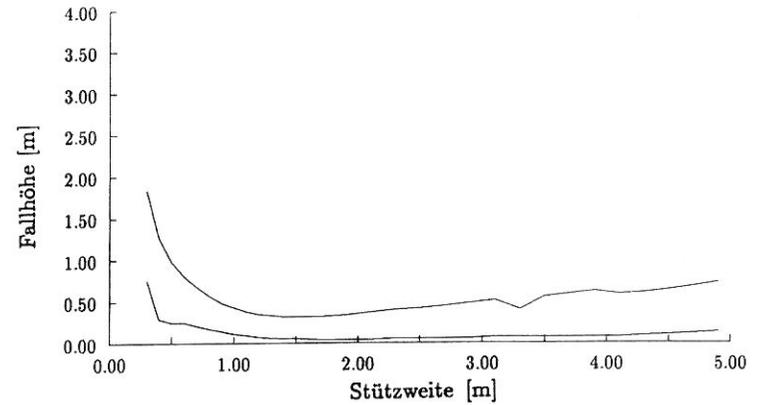


Abbildung 53: Fallhöhen-Stützweiten-Diagramm, berechnet mit einem dreigliedrigen Modell der Masse 100 kg. Bohlenquerschnitt 0,28 m x 0,045 m. Oben: Körperhaltung C, unten: Mittelung über A, B und C.

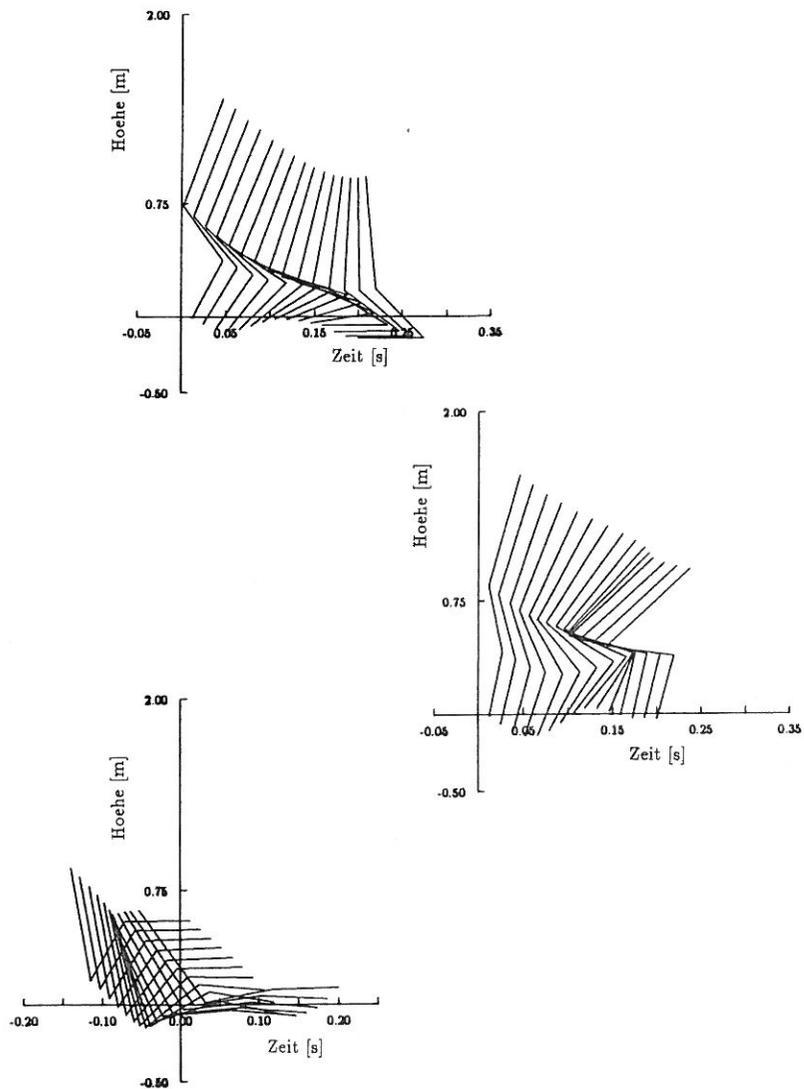


Abbildung 54: Beispiele für Körperhaltungen A (oben), B (mitte) und C (unten).

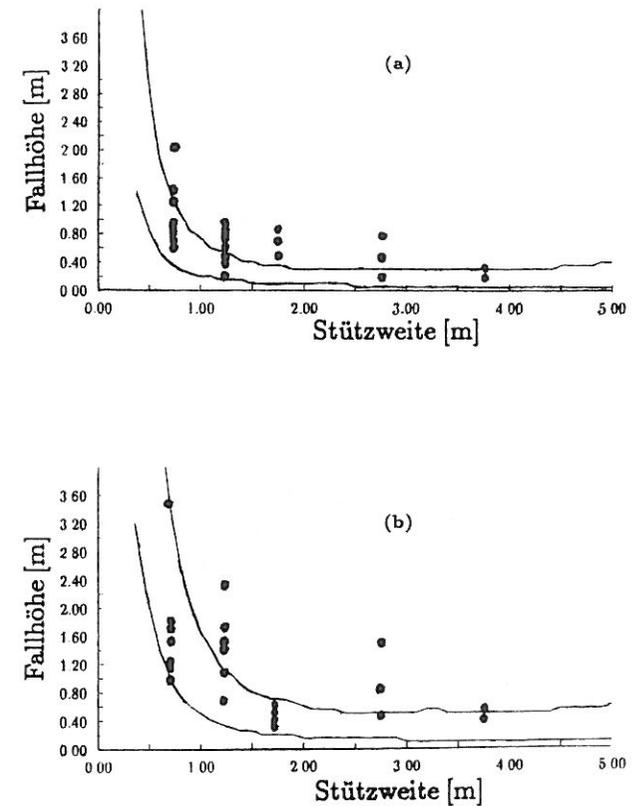


Abbildung 55: Vergleich der Fallhöhen, bei denen nach der Simulationsrechnung die Bruchspannung (obere Kurve) oder die nach DIN 1052 zulässige Spannung (untere Kurve) erreicht wird, mit den gemessenen Bruchfallhöhen (Punkte).

Diagramm (a): Bohlenquerschnitt 0.28 m x 0.04 m. Diagramm (b): Bohlenquerschnitt 0.28 m x 0.05 m.

5 Anhang

Konventionen in bgg

Vorzeichen der Zwangskräfte: Die in einem Gelenk übertragene Zwangskraft wirkt auf einen der beiden durch das Gelenk gekoppelten Körper mit negativem und auf den anderen mit positivem Vorzeichen. *Bgg* benutzt die Konvention, daß für den Körper mit höherer Nummer gilt:

$$m\ddot{x} + Z = K \quad (84)$$

und für den Körper mit niedrigerer Nummer:

$$m\ddot{x} - Z = K \quad (85)$$

Die **Nummerierung der Gelenke** geschieht in *bgg* wie folgt: In der Matrix der Eingabedatei *struktur* zur Beschreibung der Gelenkverbindungen des Mehrkörpersystems, wie sie in Abschnitt 2.2.4 beschrieben ist, werden die eingetragenen Gelenke von links oben nach rechts unten durchnummeriert. Für das in Kapitel 2 behandelte fünfgliedrige Beispiel ist die Nummerierung also entsprechend Abbildung 56.

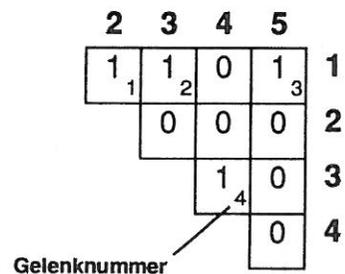


Abbildung 56: Gelenknummerierung bei fünfgliedrigem Beispiel

Nummerierung der Verbindungsvektoren (Hebel) vom Schwerpunkt eines Körpers zu den Gelenken: Der Vektor zum Gelenk niedrigster Nummer erhält die Nummer „1“, derjenige zum Gelenk mit der zweitniedrigsten Nummer erhält die Nummer „2“ usw. Dies ist beispielhaft für den zweiten Körper des Mehrkörpersystems in Abbildung 57 dargestellt.

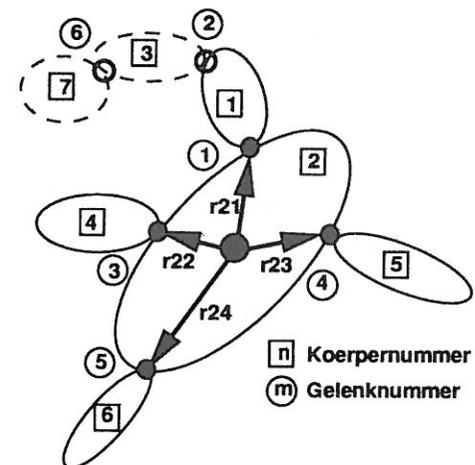


Abbildung 57: Beispiel für die Nummerierung der Hebel

Die Winkelgeschwindigkeit in Eulerwinkeln

Im körperfesten System (Hauptträgheitsachsensystem):

$$\begin{aligned}
 p &= \omega_\xi = -\dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\
 q &= \omega_\eta = \dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\
 r &= \omega_\zeta = \dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma} \\
 \dot{p} &= \dot{\omega}_\xi = -\sin \beta \cos \gamma \ddot{\alpha} + \sin \gamma \ddot{\beta} + A_\xi \\
 \dot{q} &= \dot{\omega}_\eta = \sin \beta \sin \gamma \ddot{\alpha} + \cos \gamma \ddot{\beta} + A_\eta \\
 \dot{r} &= \dot{\omega}_\zeta = \cos \beta \ddot{\alpha} + \ddot{\gamma} + A_\zeta
 \end{aligned} \quad (86)$$

mit

$$\begin{aligned}
 A_\xi &= \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \gamma \\
 A_\eta &= \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - \dot{\beta} \dot{\gamma} \sin \gamma \\
 A_\zeta &= -\dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta
 \end{aligned}$$

Im raumfesten System:

$$\begin{aligned}
 \omega_x &= \dot{\gamma} \sin \beta \cos \alpha - \dot{\beta} \sin \alpha \\
 \omega_y &= \dot{\gamma} \sin \beta \sin \alpha + \dot{\beta} \cos \alpha \\
 \omega_z &= \dot{\gamma} \cos \beta + \dot{\alpha} \\
 \dot{\omega}_x &= -\sin \alpha \ddot{\beta} + \cos \alpha \sin \beta \ddot{\gamma} + A_x \\
 \dot{\omega}_y &= \cos \alpha \ddot{\beta} + \sin \alpha \sin \beta \ddot{\gamma} + A_y \\
 \dot{\omega}_z &= \ddot{\alpha} + \cos \beta \ddot{\gamma} + A_z
 \end{aligned} \quad (87)$$

mit

$$\begin{aligned}
 A_x &= -\dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta \sin \alpha + \dot{\gamma} \dot{\beta} \cos \beta \cos \alpha - \dot{\beta} \dot{\alpha} \cos \alpha \\
 A_y &= \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta \cos \alpha + \dot{\gamma} \dot{\beta} \cos \beta \sin \alpha - \dot{\beta} \dot{\alpha} \sin \alpha \\
 A_z &= -\dot{\gamma} \dot{\beta} \sin \beta
 \end{aligned}$$

Der Fortran-Code für das fünfgliedrige Beispiel

(von *bgg* automatisch erzeugt)

```

a( 1, 1)=m( 1)
a( 1, 31)=-1.d0
a( 1, 34)=-1.d0
a( 1, 37)=-1.d0

a( 2, 2)=m( 1)
a( 2, 32)=-1.d0
a( 2, 35)=-1.d0
a( 2, 38)=-1.d0

a( 3, 3)=m( 1)
a( 3, 33)=-1.d0
a( 3, 36)=-1.d0
a( 3, 39)=-1.d0

a( 4, 4)=-sb( 1)*cg( 1)*t( 1,1)
a( 4, 5)=sg( 1)*t( 1,1)
a( 4, 31)=-r( 1, 1,2)*e( 1,3, 1)+r( 1, 1,3)*e( 1,2, 1)
a( 4, 32)=-r( 1, 1,2)*e( 1,3, 2)+r( 1, 1,3)*e( 1,2, 2)
a( 4, 33)=-r( 1, 1,2)*e( 1,3, 3)+r( 1, 1,3)*e( 1,2, 3)
a( 4, 34)=-r( 1, 2,2)*e( 1,3, 1)+r( 1, 2,3)*e( 1,2, 1)
a( 4, 35)=-r( 1, 2,2)*e( 1,3, 2)+r( 1, 2,3)*e( 1,2, 2)
a( 4, 36)=-r( 1, 2,2)*e( 1,3, 3)+r( 1, 2,3)*e( 1,2, 3)
a( 4, 37)=-r( 1, 3,2)*e( 1,3, 1)+r( 1, 3,3)*e( 1,2, 1)
a( 4, 38)=-r( 1, 3,2)*e( 1,3, 2)+r( 1, 3,3)*e( 1,2, 2)
a( 4, 39)=-r( 1, 3,2)*e( 1,3, 3)+r( 1, 3,3)*e( 1,2, 3)

a( 5, 4)=sb( 1)*sg( 1)*t( 1,2)
a( 5, 5)=cg( 1)*t( 1,2)
a( 5, 31)=-r( 1, 1,3)*e( 1,1, 1)+r( 1, 1,1)*e( 1,3, 1)
a( 5, 32)=-r( 1, 1,3)*e( 1,1, 2)+r( 1, 1,1)*e( 1,3, 2)
a( 5, 33)=-r( 1, 1,3)*e( 1,1, 3)+r( 1, 1,1)*e( 1,3, 3)
a( 5, 34)=-r( 1, 2,3)*e( 1,1, 1)+r( 1, 2,1)*e( 1,3, 1)
a( 5, 35)=-r( 1, 2,3)*e( 1,1, 2)+r( 1, 2,1)*e( 1,3, 2)
a( 5, 36)=-r( 1, 2,3)*e( 1,1, 3)+r( 1, 2,1)*e( 1,3, 3)
a( 5, 37)=-r( 1, 3,3)*e( 1,1, 1)+r( 1, 3,1)*e( 1,3, 1)
a( 5, 38)=-r( 1, 3,3)*e( 1,1, 2)+r( 1, 3,1)*e( 1,3, 2)
a( 5, 39)=-r( 1, 3,3)*e( 1,1, 3)+r( 1, 3,1)*e( 1,3, 3)

a( 6, 4)=cb( 1)*t( 1,3)
a( 6, 6)=t( 1,3)
a( 6, 31)=-r( 1, 1,1)*e( 1,2, 1)+r( 1, 1,2)*e( 1,1, 1)
a( 6, 32)=-r( 1, 1,1)*e( 1,2, 2)+r( 1, 1,2)*e( 1,1, 2)
a( 6, 33)=-r( 1, 1,1)*e( 1,2, 3)+r( 1, 1,2)*e( 1,1, 3)
a( 6, 34)=-r( 1, 2,1)*e( 1,2, 1)+r( 1, 2,2)*e( 1,1, 1)
a( 6, 35)=-r( 1, 2,1)*e( 1,2, 2)+r( 1, 2,2)*e( 1,1, 2)
a( 6, 36)=-r( 1, 2,1)*e( 1,2, 3)+r( 1, 2,2)*e( 1,1, 3)
a( 6, 37)=-r( 1, 3,1)*e( 1,2, 1)+r( 1, 3,2)*e( 1,1, 1)
a( 6, 38)=-r( 1, 3,1)*e( 1,2, 2)+r( 1, 3,2)*e( 1,1, 2)
a( 6, 39)=-r( 1, 3,1)*e( 1,2, 3)+r( 1, 3,2)*e( 1,1, 3)

a( 7, 7)=m( 2)
a( 7, 31)=1.d0

a( 8, 8)=m( 2)
a( 8, 32)=1.d0

a( 9, 9)=m( 2)
a( 9, 33)=1.d0

a( 10, 10)=-sb( 2)*cg( 2)*t( 2,1)
a( 10, 11)=sg( 2)*t( 2,1)
a( 10, 31)=-r( 2, 1,2)*e( 2,3, 1)-r( 2, 1,3)*e( 2,2, 1)
a( 10, 32)=-r( 2, 1,2)*e( 2,3, 2)-r( 2, 1,3)*e( 2,2, 2)
a( 10, 33)=-r( 2, 1,2)*e( 2,3, 3)-r( 2, 1,3)*e( 2,2, 3)

a( 11, 10)=sb( 2)*sg( 2)*t( 2,2)
a( 11, 11)=cg( 2)*t( 2,2)
a( 11, 31)=-r( 2, 1,3)*e( 2,1, 1)-r( 2, 1,1)*e( 2,3, 1)
a( 11, 32)=-r( 2, 1,3)*e( 2,1, 2)-r( 2, 1,1)*e( 2,3, 2)
a( 11, 33)=-r( 2, 1,3)*e( 2,1, 3)-r( 2, 1,1)*e( 2,3, 3)

a( 12, 10)=cb( 2)*t( 2,3)
a( 12, 12)=t( 2,3)
a( 12, 31)=-r( 2, 1,1)*e( 2,2, 1)-r( 2, 1,2)*e( 2,1, 1)
a( 12, 32)=-r( 2, 1,1)*e( 2,2, 2)-r( 2, 1,2)*e( 2,1, 2)
a( 12, 33)=-r( 2, 1,1)*e( 2,2, 3)-r( 2, 1,2)*e( 2,1, 3)

a( 13, 13)=m( 3)
a( 13, 34)=1.d0
a( 13, 40)=-1.d0

a( 14, 14)=m( 3)
a( 14, 35)=1.d0
a( 14, 41)=-1.d0

```

```

a( 15, 15)=m( 3)
a( 15, 36)=1.d0
a( 15, 42)=-1.d0

a( 16, 16)=-sb( 3)*cg( 3)*t( 3,1)
a( 16, 17)=sg( 3)*t( 3,1)
a( 16, 34)=+r( 3, 1,2)*e( 3,3, 1)-r( 3, 1,3)*e( 3,2, 1)
a( 16, 35)=+r( 3, 1,2)*e( 3,3, 2)-r( 3, 1,3)*e( 3,2, 2)
a( 16, 36)=+r( 3, 1,2)*e( 3,3, 3)-r( 3, 1,3)*e( 3,2, 3)
a( 16, 40)=-r( 3, 2,2)*e( 3,3, 1)+r( 3, 2,3)*e( 3,2, 1)
a( 16, 41)=-r( 3, 2,2)*e( 3,3, 2)+r( 3, 2,3)*e( 3,2, 2)
a( 16, 42)=-r( 3, 2,2)*e( 3,3, 3)+r( 3, 2,3)*e( 3,2, 3)

a( 17, 16)=sb( 3)*sg( 3)*t( 3,2)
a( 17, 17)=cg( 3)*t( 3,2)
a( 17, 34)=+r( 3, 1,3)*e( 3,1, 1)-r( 3, 1,1)*e( 3,3, 1)
a( 17, 35)=+r( 3, 1,3)*e( 3,1, 2)-r( 3, 1,1)*e( 3,3, 2)
a( 17, 36)=+r( 3, 1,3)*e( 3,1, 3)-r( 3, 1,1)*e( 3,3, 3)
a( 17, 40)=-r( 3, 2,3)*e( 3,1, 1)+r( 3, 2,1)*e( 3,3, 1)
a( 17, 41)=-r( 3, 2,3)*e( 3,1, 2)+r( 3, 2,1)*e( 3,3, 2)
a( 17, 42)=-r( 3, 2,3)*e( 3,1, 3)+r( 3, 2,1)*e( 3,3, 3)

a( 18, 16)=cb( 3)*t( 3,3)
a( 18, 18)=t( 3,3)
a( 18, 34)=+r( 3, 1,1)*e( 3,2, 1)-r( 3, 1,2)*e( 3,1, 1)
a( 18, 35)=+r( 3, 1,1)*e( 3,2, 2)-r( 3, 1,2)*e( 3,1, 2)
a( 18, 36)=+r( 3, 1,1)*e( 3,2, 3)-r( 3, 1,2)*e( 3,1, 3)
a( 18, 40)=-r( 3, 2,1)*e( 3,2, 1)+r( 3, 2,2)*e( 3,1, 1)
a( 18, 41)=-r( 3, 2,1)*e( 3,2, 2)+r( 3, 2,2)*e( 3,1, 2)
a( 18, 42)=-r( 3, 2,1)*e( 3,2, 3)+r( 3, 2,2)*e( 3,1, 3)

a( 19, 19)=m( 4)
a( 19, 40)=1.d0

a( 20, 20)=m( 4)
a( 20, 41)=1.d0

a( 21, 21)=m( 4)
a( 21, 42)=1.d0

a( 22, 22)=-sb( 4)*cg( 4)*t( 4,1)
a( 22, 23)=sg( 4)*t( 4,1)
a( 22, 40)=+r( 4, 1,2)*e( 4,3, 1)-r( 4, 1,3)*e( 4,2, 1)
a( 22, 41)=+r( 4, 1,2)*e( 4,3, 2)-r( 4, 1,3)*e( 4,2, 2)
a( 22, 42)=+r( 4, 1,2)*e( 4,3, 3)-r( 4, 1,3)*e( 4,2, 3)

a( 23, 22)=sb( 4)*sg( 4)*t( 4,2)
a( 23, 23)=cg( 4)*t( 4,2)
a( 23, 40)=+r( 4, 1,3)*e( 4,1, 1)-r( 4, 1,1)*e( 4,3, 1)
a( 23, 41)=+r( 4, 1,3)*e( 4,1, 2)-r( 4, 1,1)*e( 4,3, 2)
a( 23, 42)=+r( 4, 1,3)*e( 4,1, 3)-r( 4, 1,1)*e( 4,3, 3)

a( 24, 22)=cb( 4)*t( 4,3)
a( 24, 24)=t( 4,3)
a( 24, 40)=+r( 4, 1,1)*e( 4,2, 1)-r( 4, 1,2)*e( 4,1, 1)
a( 24, 41)=+r( 4, 1,1)*e( 4,2, 2)-r( 4, 1,2)*e( 4,1, 2)
a( 24, 42)=+r( 4, 1,1)*e( 4,2, 3)-r( 4, 1,2)*e( 4,1, 3)

a( 25, 25)=m( 5)
a( 25, 37)=1.d0

a( 26, 26)=m( 5)
a( 26, 38)=1.d0

a( 27, 27)=m( 5)
a( 27, 39)=1.d0

a( 28, 28)=-sb( 5)*cg( 5)*t( 5,1)
a( 28, 29)=sg( 5)*t( 5,1)
a( 28, 37)=+r( 5, 1,2)*e( 5,3, 1)-r( 5, 1,3)*e( 5,2, 1)
a( 28, 38)=+r( 5, 1,2)*e( 5,3, 2)-r( 5, 1,3)*e( 5,2, 2)
a( 28, 39)=+r( 5, 1,2)*e( 5,3, 3)-r( 5, 1,3)*e( 5,2, 3)

a( 29, 28)=sb( 5)*sg( 5)*t( 5,2)
a( 29, 29)=cg( 5)*t( 5,2)
a( 29, 37)=+r( 5, 1,3)*e( 5,1, 1)-r( 5, 1,1)*e( 5,3, 1)
a( 29, 38)=+r( 5, 1,3)*e( 5,1, 2)-r( 5, 1,1)*e( 5,3, 2)
a( 29, 39)=+r( 5, 1,3)*e( 5,1, 3)-r( 5, 1,1)*e( 5,3, 3)

a( 30, 28)=cb( 5)*t( 5,3)
a( 30, 30)=t( 5,3)
a( 30, 37)=+r( 5, 1,1)*e( 5,2, 1)-r( 5, 1,2)*e( 5,1, 1)
a( 30, 38)=+r( 5, 1,1)*e( 5,2, 2)-r( 5, 1,2)*e( 5,1, 2)
a( 30, 39)=+r( 5, 1,1)*e( 5,2, 3)-r( 5, 1,2)*e( 5,1, 3)

```

```

a( 31, 1)=1.d0
a( 31, 7)=-1.d0
a( 31, 4)=-r( 1, 1,2)
a( 31, 10)=r( 2, 1,2)
a( 31, 5)=r( 1, 1,3)*ca( 1)
a( 31, 11)=-r( 2, 1,3)*ca( 2)
a( 31, 6)=r( 1, 1,3)*sa( 1)*sb( 1)-r( 1, 1,2)*cb( 1)
a( 31, 12)=-r( 2, 1,3)*sa( 2)*sb( 2)+r( 2, 1,2)*cb( 2)

a( 32, 2)=1.d0
a( 32, 8)=-1.d0
a( 32, 4)=r( 1, 1,1)
a( 32, 10)=-r( 2, 1,1)
a( 32, 5)=r( 1, 1,3)*sa( 1)
a( 32, 11)=-r( 2, 1,3)*sa( 2)
a( 32, 6)=-r( 1, 1,3)*ca( 1)*sb( 1)+r( 1, 1,1)*cb( 1)
a( 32, 12)=r( 2, 1,3)*ca( 2)*sb( 2)-r( 2, 1,1)*cb( 2)

a( 33, 3)=1.d0
a( 33, 9)=-1.d0
a( 33, 5)=-r( 1, 1,2)*sa( 1)-r( 1, 1,1)*ca( 1)
a( 33, 11)=r( 2, 1,2)*sa( 2)+r( 2, 1,1)*ca( 2)
a( 33, 6)=r( 1, 1,2)*ca( 1)*sb( 1)
& -r( 1, 1,1)*sa( 1)*sb( 1)
& a( 33, 12)=-r( 2, 1,2)*ca( 2)*sb( 2)
& +r( 2, 1,1)*sa( 2)*sb( 2)

a( 34, 1)=1.d0
a( 34, 13)=-1.d0
a( 34, 4)=-r( 1, 2,2)
a( 34, 16)=r( 3, 1,2)
a( 34, 5)=r( 1, 2,3)*ca( 1)
a( 34, 17)=-r( 3, 1,3)*ca( 3)
a( 34, 6)=r( 1, 2,3)*sa( 1)*sb( 1)-r( 1, 2,2)*cb( 1)
a( 34, 18)=-r( 3, 1,3)*sa( 3)*sb( 3)+r( 3, 1,2)*cb( 3)

a( 35, 2)=1.d0
a( 35, 14)=-1.d0
a( 35, 4)=r( 1, 2,1)
a( 35, 16)=-r( 3, 1,1)
a( 35, 5)=r( 1, 2,3)*sa( 1)
a( 35, 17)=-r( 3, 1,3)*sa( 3)
a( 35, 6)=-r( 1, 2,3)*ca( 1)*sb( 1)+r( 1, 2,1)*cb( 1)
a( 35, 18)=r( 3, 1,3)*ca( 3)*sb( 3)-r( 3, 1,1)*cb( 3)

a( 36, 3)=1.d0
a( 36, 15)=-1.d0
a( 36, 5)=-r( 1, 2,2)*sa( 1)-r( 1, 2,1)*ca( 1)
a( 36, 17)=r( 3, 1,2)*sa( 3)+r( 3, 1,1)*ca( 3)
a( 36, 6)=r( 1, 2,2)*ca( 1)*sb( 1)
& -r( 1, 2,1)*sa( 1)*sb( 1)
& a( 36, 18)=-r( 3, 1,2)*ca( 3)*sb( 3)
& +r( 3, 1,1)*sa( 3)*sb( 3)

a( 37, 1)=1.d0
a( 37, 25)=-1.d0
a( 37, 4)=-r( 1, 3,2)
a( 37, 28)=r( 5, 1,2)
a( 37, 5)=r( 1, 3,3)*ca( 1)
a( 37, 29)=-r( 5, 1,3)*ca( 5)
a( 37, 6)=r( 1, 3,3)*sa( 1)*sb( 1)-r( 1, 3,2)*cb( 1)
a( 37, 30)=-r( 5, 1,3)*sa( 5)*sb( 5)+r( 5, 1,2)*cb( 5)

a( 38, 2)=1.d0
a( 38, 26)=-1.d0
a( 38, 4)=r( 1, 3,1)
a( 38, 28)=-r( 5, 1,1)
a( 38, 5)=r( 1, 3,3)*sa( 1)
a( 38, 29)=-r( 5, 1,3)*sa( 5)
a( 38, 6)=-r( 1, 3,3)*ca( 1)*sb( 1)+r( 1, 3,1)*cb( 1)
a( 38, 30)=r( 5, 1,3)*ca( 5)*sb( 5)-r( 5, 1,1)*cb( 5)

a( 39, 3)=1.d0
a( 39, 27)=-1.d0
a( 39, 5)=-r( 1, 3,2)*sa( 1)-r( 1, 3,1)*ca( 1)
a( 39, 29)=r( 5, 1,2)*sa( 5)+r( 5, 1,1)*ca( 5)
a( 39, 6)=r( 1, 3,2)*ca( 1)*sb( 1)
& -r( 1, 3,1)*sa( 1)*sb( 1)
& a( 39, 30)=-r( 5, 1,2)*ca( 5)*sb( 5)
& +r( 5, 1,1)*sa( 5)*sb( 5)

a( 40, 13)=1.d0
a( 40, 19)=-1.d0
a( 40, 16)=-r( 3, 2,2)

```

```

a( 40, 22)=ri( 4, 1,2)
a( 40, 17)=ri( 3, 2,3)*ca( 3)
a( 40, 23)=-ri( 4, 1,3)*ca( 4)
a( 40, 18)=ri( 3, 2,3)*sa( 3)*sb( 3)-ri( 3, 2,2)*cb( 3)
a( 40, 24)=-ri( 4, 1,3)*sa( 4)*sb( 4)+ri( 4, 1,2)*cb( 4)

a( 41, 14)=1.d0
a( 41, 20)=-1.d0
a( 41, 16)=ri( 3, 2,1)
a( 41, 22)=-ri( 4, 1,1)
a( 41, 17)=ri( 3, 2,3)*sa( 3)
a( 41, 23)=-ri( 4, 1,3)*sa( 4)
a( 41, 18)=-ri( 3, 2,3)*ca( 3)*sb( 3)+ri( 3, 2,1)*cb( 3)
a( 41, 24)=ri( 4, 1,3)*ca( 4)*sb( 4)-ri( 4, 1,1)*cb( 4)

a( 42, 15)=1.d0
a( 42, 21)=-1.d0
a( 42, 17)=-ri( 3, 2,2)*sa( 3)-ri( 3, 2,1)*ca( 3)
a( 42, 23)=ri( 4, 1,2)*sa( 4)+ri( 4, 1,1)*ca( 4)
a( 42, 18)=ri( 3, 2,2)*ca( 3)*sb( 3)
& -ri( 3, 2,1)*sa( 3)*sb( 3)
a( 42, 24)=-ri( 4, 1,2)*ca( 4)*sb( 4)
& +ri( 4, 1,1)*sa( 4)*sb( 4)

```

```

b( 1)=kt( 1, 1)
b( 2)=kt( 1, 2)
b( 3)=kt( 1, 3)
b( 4)=mt( 1,1)-aa( 1,1)*t( 1,1)
& -om( 1,2)*om( 1,3)*t( 1,3)-t( 1,2)
b( 5)=mt( 1,2)-aa( 1,2)*t( 1,2)
& -om( 1,1)*om( 1,3)*t( 1,1)-t( 1,3)
b( 6)=mt( 1,3)-aa( 1,3)*t( 1,3)
& -om( 1,1)*om( 1,2)*t( 1,2)-t( 1,1)
b( 7)=kt( 2, 1)
b( 8)=kt( 2, 2)
b( 9)=kt( 2, 3)
b( 10)=mt( 2,1)-aa( 2,1)*t( 2,1)
& -om( 2,2)*om( 2,3)*t( 2,3)-t( 2,2)
b( 11)=mt( 2,2)-aa( 2,2)*t( 2,2)
& -om( 2,1)*om( 2,3)*t( 2,1)-t( 2,3)
b( 12)=mt( 2,3)-aa( 2,3)*t( 2,3)
& -om( 2,1)*om( 2,2)*t( 2,2)-t( 2,1)
b( 13)=kt( 3, 1)
b( 14)=kt( 3, 2)
b( 15)=kt( 3, 3)
b( 16)=mt( 3,1)-aa( 3,1)*t( 3,1)
& -om( 3,2)*om( 3,3)*t( 3,3)-t( 3,2)
b( 17)=mt( 3,2)-aa( 3,2)*t( 3,2)
& -om( 3,1)*om( 3,3)*t( 3,1)-t( 3,3)
b( 18)=mt( 3,3)-aa( 3,3)*t( 3,3)
& -om( 3,1)*om( 3,2)*t( 3,2)-t( 3,1)
b( 19)=kt( 4, 1)
b( 20)=kt( 4, 2)
b( 21)=kt( 4, 3)
b( 22)=mt( 4,1)-aa( 4,1)*t( 4,1)
& -om( 4,2)*om( 4,3)*t( 4,3)-t( 4,2)
b( 23)=mt( 4,2)-aa( 4,2)*t( 4,2)
& -om( 4,1)*om( 4,3)*t( 4,1)-t( 4,3)
b( 24)=mt( 4,3)-aa( 4,3)*t( 4,3)
& -om( 4,1)*om( 4,2)*t( 4,2)-t( 4,1)
b( 25)=kt( 5, 1)
b( 26)=kt( 5, 2)
b( 27)=kt( 5, 3)
b( 28)=mt( 5,1)-aa( 5,1)*t( 5,1)
& -om( 5,2)*om( 5,3)*t( 5,3)-t( 5,2)
b( 29)=mt( 5,2)-aa( 5,2)*t( 5,2)
& -om( 5,1)*om( 5,3)*t( 5,1)-t( 5,3)
b( 30)=mt( 5,3)-aa( 5,3)*t( 5,3)
& -om( 5,1)*om( 5,2)*t( 5,2)-t( 5,1)

b( 31)=-aa( 1,2)*ri( 1, 1,3)+aa( 2,2)*ri( 2, 1,3)
& +aa( 1,3)*ri( 1, 1,2)-aa( 2,3)*ri( 2, 1,2)
& -zp( 1, 1,1)+zp( 2, 1,1)
b( 32)=-aa( 1,3)*ri( 1, 1,1)+aa( 2,3)*ri( 2, 1,1)
& +aa( 1,1)*ri( 1, 1,3)-aa( 2,1)*ri( 2, 1,3)
& -zp( 1, 1,2)+zp( 2, 1,2)
b( 33)=-aa( 1,1)*ri( 1, 1,2)+aa( 2,1)*ri( 2, 1,2)
& +aa( 1,2)*ri( 1, 1,1)-aa( 2,2)*ri( 2, 1,1)
& -zp( 1, 1,3)+zp( 2, 1,3)
b( 34)=-aa( 1,2)*ri( 1, 2,3)+aa( 3,2)*ri( 3, 1,3)

```

```

& +aa( 1,3)*ri( 1, 2,2)-aa( 3,3)*ri( 3, 1,2)
& -zp( 1, 2,1)+zp( 3, 1,1)
b( 35)=-aa( 1,3)*ri( 1, 2,1)+aa( 3,3)*ri( 3, 1,1)
& +aa( 1,1)*ri( 1, 2,3)-aa( 3,1)*ri( 3, 1,3)
& -zp( 1, 2,2)+zp( 3, 1,2)
b( 36)=-aa( 1,1)*ri( 1, 2,2)+aa( 3,1)*ri( 3, 1,2)
& +aa( 1,2)*ri( 1, 2,1)-aa( 3,2)*ri( 3, 1,1)
& -zp( 1, 2,3)+zp( 3, 1,3)
b( 37)=-aa( 1,2)*ri( 1, 3,3)+aa( 5,2)*ri( 5, 1,3)
& +aa( 1,3)*ri( 1, 3,2)-aa( 5,3)*ri( 5, 1,2)
& -zp( 1, 3,1)+zp( 5, 1,1)
b( 38)=-aa( 1,3)*ri( 1, 3,1)+aa( 5,3)*ri( 5, 1,1)
& +aa( 1,1)*ri( 1, 3,3)-aa( 5,1)*ri( 5, 1,3)
& -zp( 1, 3,2)+zp( 5, 1,2)
b( 39)=-aa( 1,1)*ri( 1, 3,2)+aa( 5,1)*ri( 5, 1,2)
& +aa( 1,2)*ri( 1, 3,1)-aa( 5,2)*ri( 5, 1,1)
& -zp( 1, 3,3)+zp( 5, 1,3)
b( 40)=-aa( 3,2)*ri( 3, 2,3)+aa( 4,2)*ri( 4, 1,3)
& +aa( 3,3)*ri( 3, 2,2)-aa( 4,3)*ri( 4, 1,2)
& -zp( 3, 2,1)+zp( 4, 1,1)
b( 41)=-aa( 3,3)*ri( 3, 2,1)+aa( 4,3)*ri( 4, 1,1)
& +aa( 3,1)*ri( 3, 2,3)-aa( 4,1)*ri( 4, 1,3)
& -zp( 3, 2,2)+zp( 4, 1,2)
b( 42)=-aa( 3,1)*ri( 3, 2,2)+aa( 4,1)*ri( 4, 1,2)
& +aa( 3,2)*ri( 3, 2,1)-aa( 4,2)*ri( 4, 1,1)
& -zp( 3, 2,3)+zp( 4, 1,3)

```

dabei sind:

$e(i, m, n)$: $e_{i11} \dots e_{i33}$
$r(i, j, k)$: $r_{ij\zeta}, r_{ij\eta}, r_{ij\zeta}$
$ri(i, j, k)$: $r_{ij\zeta}, r_{ij\eta}, r_{ij\zeta}$
$m(i)$: m_i
$t(i, k)$: $\theta_{i\zeta}, \theta_{i\eta}, \theta_{i\zeta}$
$sa(i), sb(i), sg(i)$: $\sin \alpha_i, \sin \beta_i, \sin \gamma_i$
$ca(i), cb(i), cg(i)$: $\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i$
$aa(i, k)$: $A_{i\zeta}, A_{i\eta}, A_{i\zeta}$
$aa(i, k)$: $A_{i\zeta}, A_{i\eta}, A_{i\zeta}$
$om(i, k)$: $\omega_{i\zeta}, \omega_{i\eta}, \omega_{i\zeta}$
$zp(i, j, k)$: $[\omega_i \times (\omega_i \times r_{ij})]_{x,y,z}$
$kt(i, k)$: $K_{i\zeta}, K_{i\eta}, K_{i\zeta}$
$mt(i, k)$: $M_{i\zeta}, M_{i\eta}, M_{i\zeta}$

Nur die Größen $r_{ij\zeta}, r_{ij\eta}, r_{ij\zeta}, \theta_{i\zeta}, \theta_{i\eta}, \theta_{i\zeta}, m_i$ sind zeitunabhängig. Alle anderen müssen in jedem Integrationschritt neu berechnet werden.

Übersicht über simsys

Abbildung 58 gibt die Struktur von *simsys* wieder.

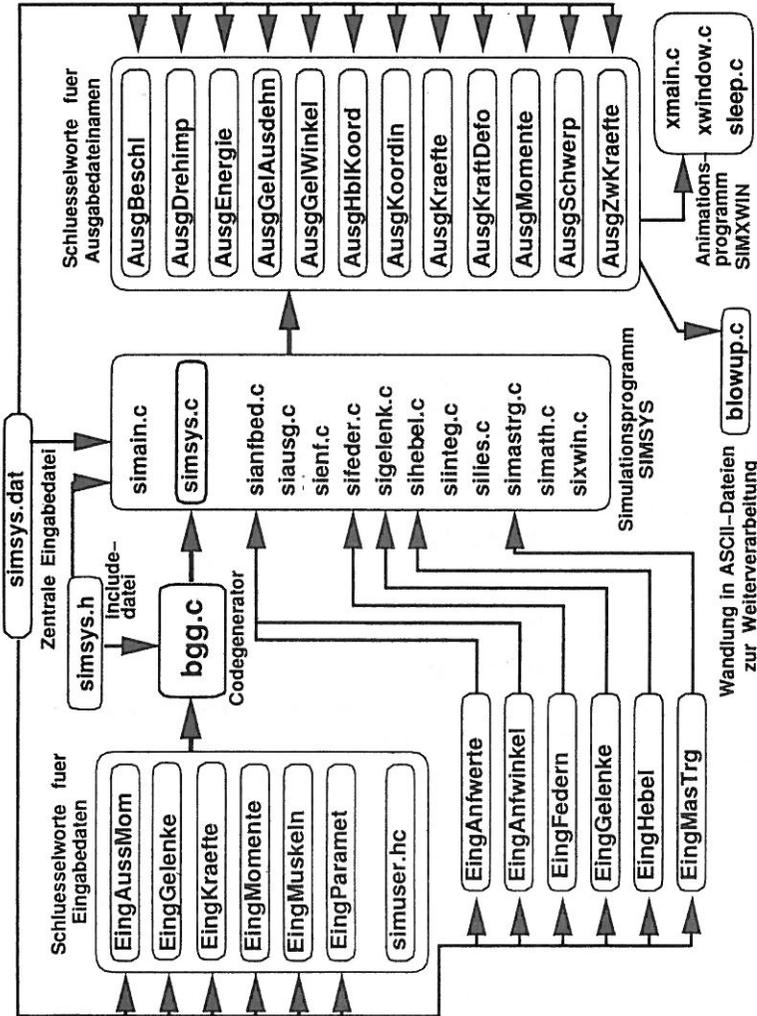


Abbildung 58: Aufbau des Programmpakets *simsys*.

In einer zentralen Eingabedatei *simsys.dat* stehen sogenannte Schlüsselworte, die der Auffindung bestimmter Daten dienen. Hinter den Schlüsselworten *EinGelenke* bis *EingParameter* und *EingAnfwerte* bis *EingMasTrg* stehen die Namen der Eingabedateien, in denen diese Schlüsselworte wieder auftauchen und dort einen bestimmten Datensatz markieren. So steht beispielsweise hinter dem Schlüsselwort *EingGelenke* die Eingabedatei, welche die zur Beschreibung der Gelenke des Mehrkörpersystems notwendigen Daten beinhaltet. Diese Daten sind in der so spezifizierten Eingabedatei wieder durch das Schlüsselwort *EingGelenke* markiert, weil die Datei unter Umständen auch noch andere Daten enthält. Diese sind dann ebenfalls durch ein Schlüsselwort gekennzeichnet.

Hinter den Schlüsselworten *AusgBeschl* bis *AusgZwKraefte* stehen die Namen der Ausgabedateien, in welche die verschiedenen Ergebnisdaten der Simulationsrechnung geschrieben werden sollen. Die errechneten Zwangskräfte werden zum Beispiel in eine Datei geschrieben, deren Namen hinter dem Schlüsselwort *AusgZwKraefte* anzugeben ist.

Die zentrale Eingabedatei *simsys.dat* kann außerdem noch Berechnungsparameter für das Simulationsprogramm enthalten, welche die Default-Werte, die unter dem Schlüsselwort *EingParameter* angegeben wurden, überschreiben.

Mit den Schlüsselworten sind, als Vorschlag, folgende Ein- und Ausgabedateien assoziiert:

Eingabe		Ausgabe	
Schlüsselwort	Dateiname	Schlüsselwort	Dateiname
EingAnfWerte	anfwerte.dat	AusgBeschl	Beschl.dat
EingAnfWinkel	anfwerte.dat	AusgGelAusdehn	Ausdehn.dat
EingAussMom	aussmom.dat	AusgGelWinkel	GelWinkel.dat
EingFedern	federn.dat	AusgHblKoord	HblKoord.dat
EingGelenke	gelenke.dat	AusgKoordin	Koordin.dat
EingHebel	hebel.dat	AusgKraefte	Kraefte.dat
EingKraefte	kraefte.dat	AusgKraftDefo	KraftDefo.dat
EingMasTrg	mastrg.dat	AusgMomente	Momente.dat
EingMomente	momente.dat	AusgSchwerp	Schwerp.dat
EingMuskeln	muskeln.dat	AusgZwKraefte	ZwKraefte.dat
EingParamet	paramet.dat		

In den Eingabedateien *anfwerte.dat* bis *parameter.dat* ist durch ausführliche Kommentare dargelegt, welche Daten in welcher Form angegeben werden müssen.

Mit Hilfe der Daten, die unter den Schlüsselworten *EingAussMom* bis *EingParamet* zu finden sind, erzeugt dann *bgg.c* den C-Code für ein komplettes Modul namens *simsys.c*, das den gesamten modellspezifischen Code enthält, unter anderem auch die Bewegungsgleichungen.

Die Datei *simuser.hc* dient dazu, außer den Koordinaten und Geschwindigkeiten der Bewegungsgleichungen noch zusätzliche Größen aufzuintegrieren. So können beispielsweise zu Kontrollzwecken die Drehmomente zur Drehimpulsänderung aufintegriert und mit der Drehimpulsänderung verglichen werden, die sich aus den Winkelgeschwindigkeiten berechnen läßt.

Die Datei *simsys.h* ist eine Include-Datei mit Typdefinitionen und Funktionsprototypen, die sowohl im Code-Generator *bgg.c* als auch im Simulationsprogramm (bestehend

aus den Modulen *simain.c* bis *sixwin.c*) eingebunden wird.

Während eines Simulationslaufs wird von den Modulen des Simulationsprogramms auf die durch die Schlüsselworte *EingAnfwerte* bis *EingMasTrg* gekennzeichneten Daten zugegriffen. Auch diesen Daten sind Kommentare beigelegt, die die Art und das erforderliche Format der Daten beschreiben.

Die Simulationsergebnisse werden schließlich in den Ausgabedateien im Binärformat abgelegt, deren Namen wie bereits erwähnt in *simsys.dat* hinter den jeweiligen Schlüsselworten eingetragen sind. Für das Postprocessing können die binären Ergebnisdateien mit *blowup.c* in ASCII-Dateien umgewandelt werden.

Mit einem einfachen Strichgraphik-Programm, bestehend aus den Modulen *xmain.c*, *xwindow.c* und *sleep.c* wird eine Animationssequenz der simulierten Bewegung erzeugt.

Die für das jeweilige biomechanische Modell spezifischen Algorithmen für die inneren und äußeren Momente sowie die inneren und äußeren Kräfte können natürlich nicht automatisch erzeugt werden. Deren Formulierung ist die eigentliche biomechanische Entwicklungsarbeit. Diese Algorithmen müssen also vom Benutzer codiert werden. Der Code wird unter den Schlüsselworten *EingMomente*, *EingAussMom*, *EingMuskeln* und *EingKraefte* in die jeweiligen Eingabedateien geschrieben. Unter *EingMomente* werden die inneren Momente, die in den Gelenken des Mehrkörpersystems wirken, codiert. Solche abstrakten inneren Momente können etwa zur Bewegungssteuerung des menschlichen Körpers verwendet werden. Will man detaillierter nach der Natur modellieren, so läßt man die inneren Momente durch innere Kräfte entstehen, welche durch Muskeln erzeugt werden. Solche inneren Kräfte werden unter *EingMuskeln* codiert. Unter *EingAussMom* steht der Code für beliebige modellspezifische äußere Momente, während unter *EingKraefte* der Code für äußere Kräfte steht, wie etwa die Reaktionskräfte beim Kontakt mit der Umwelt steht.

Sehr hilfreich für die biomechanische Modellierung ist die Verfügbarkeit von allgemein formulierten Federn in der Art von Gleichung 53. Unter dem Schlüsselwort *EingFedern* können solche Federn in das Modell eingebaut werden. Dies geschieht durch die Angabe der Parameter *a*, *b*, *c*, *d* sowie der Längen der entspannten Federn l_0 und von jeweils zwei Punkten, an denen die Federenden eingehängt werden sollen.

Eingabedateien mit Modellparametern

```
# simsys.dat
# @(#) SID 1.2 2/17/92
#
# Lehr- und Forschungsbereich Theoretische Astrophysik Tuebingen
# Biomechanik
#
# Parameterenvironment zur Steuerung der Simulation.
# Folgende Parameter werden zur Steuerung verwendet:
#
# Integrationsparameter:
# * Integrationsdauer, Integrationsrittweite
# * Relative und absolute Integrationsgenauigkeit
#
# Ausgabeparameter:
# * Ausgabeintervall
# * Ausgabedatei Zwangskraefte
# * Ausgabedatei Gelenkausdehnung
# * Ausgabedatei Koordinaten
# * Ausgabedatei Drehimpuls
# * Ausgabedatei Energie
#
# Jede Zeile beginnt mit einem Schluesselwort, unter dem der nachfolgende
# String zugegriffen wird. Die Gross/ Kleinschreibung der Schluessel-
# worte ist relevant.
#
#####
##### Eingabedateien #####
#-- Gelenkdefinitionen und Gelenkwinkeldefinitionen:
#-- Gelenke in/gelenke.dat
#-- Massen und Traegheitsmomente:
EingMasTrg in/masrg.dat
#-- Hebelarme:
EingHebel in/hebel.dat
#-- Anfangswerte:
EingAnfwinkel in/anfwerte.dat
EingAnfwerte in/anfwerte.dat
EingMuskeln in/muskeln.dat
EingFedern in/federn.dat
EingMomente in/momente.dat
EingKraefte in/kraefte.dat
EingAussMom in/aussmom.dat
EingParamet in/paramet.dat
##### Integrationsparameter #####
IntMaxErrTol 1
IntMaxErrSteps 1
IntVarZahl 0
#----- Integrationsdauer in s ----
IntDauer 1.0
#----- Integrationsrittweite in ms ----
IntSchrweite 0.1
#----- Absolute Integrationsgenauigkeit ---
IntGenauAbs 1.0e-6
#----- Relative Integrationsgenauigkeit ---
IntGenauRel 1.0e-6
##### Berechnungsparameter #####
#----- Gravitation in m/(s*s) -----
GravitatX 0.0
GravitatZ -9.81
GelAnschlOrdnung 3;
BodenHoeheZ 0.0;
BodKraftFaktX 40.0;
BodKraftFaktVX 15.0;
BodKraftFaktZ 40.0;
BodKraftFaktVZ 15.0;
BBFedLen 1.0;
BBFedera 250000;
BBFederb 1.0;
BBFeder c 0.0;
BBFederd 1.0;
SollKnie 147.0;
SollHuef 139.0;
MomKnieA 10.0
MomKnieB 1.0
MomKnieC 20.0
```

```

MomKnieD 1.0
MomHuefA 10.0
MomHuefB 1.0
MomHuefC 20.0
MomHuefD 1.0
##### Ausgabeparameter #####
AusgIntervall 0.001
AusgKoeNr 1
AusgHebNr 2
#----- Ausgabedateien -----
#----- vollst. Dateiname (d. h. mit Pfad) der Ausgabedateien
AusgZwKraefte out/ZwKraefte.dat
AusgGelAusdehn out/Ausdehn.dat
AusgHblKoord out/HblKoord.dat
AusgKoordin out/Koordin.dat
AusgBeschl out/Beschl.dat
AusgKraftDefo out/KraftDefo.dat
AusgEnergie
AusgDrehimp
AusgSchwerp out/Schwerp.dat
AusgKraefte out/Kraefte.dat
AusgMomente out/Momente.dat
AusgGelWinkel out/GelWinkel.dat
##### Anzeigeparameter #####
#----- Sleep in ms zwischen zwei Bildern --
AnzSleep 10

```

Abbildung 59: Eingabedatei *simsys.dat* mit den Parametern für die Simulationsrechnungen in dieser Arbeit

```

Definition der Federn mit folgender Syntax:
(KNr1:HNr1-KNr2:HNr2) = (len, a, b, c, d);
@@FEDERN@
(1:1-4:1) = (0.0, 1000, 3.0, 1000, 3.0);
(1:2-4:2) = (0.0, 1000, 3.0, 1000, 3.0);
(2:2-5:2) = (0.0, 1000, 3.0, 1000, 3.0);
(2:1-5:1) = (0.0, 1000, 3.0, 1000, 3.0);
(3:2-6:2) = (0.0, 1000, 3.0, 1000, 3.0);
(3:1-6:1) = (0.0, 1000, 3.0, 1000, 3.0);
@@@

```

Abbildung 60: Eingabedatei *federn.dat* mit den Parametern für die Schwabbelmassen-Kopplungen

Literatur

- [Aleshinsky, Zatsiorsky, 1978] Aleshinsky S.Y., Zatsiorsky V.M.
Human locomotion in space analysed biomechanically through a multi-link chain model.
J. Biomech. 11, 101-108, (1978)
- [BIA-Report, 1984] Berufsgenossenschaftliches Institut für Arbeitssicherheit
Untersuchungen zur Stoßbelastung von Arbeits- und Fanggerüsten.
BIA-Report 5/84
- [Budo, 1987] Budó A.
Theoretische Mechanik
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, (1987)
- [Cappozzo, Leo, Pedotti, 1975] Cappozzo A., Leo T., Pedotti A.
A general computing method for the analysis of human locomotion.
J. Biomech. 8, 307-320, (1975)
- [Clauser, McConville, Young, 1969] Clauser C.E., McConville J.T., Young J.W. (1969)
Weight, volume and centre of mass of segments of the human body.
AMRL Technical Report, 69-70. Wright Patterson Air Force Base, Ohio.
- [DIN 4420, 1988] Deutsche Norm DIN 4420
Arbeits- und Schutzgerüste: Allg. Regelungen, Sicherheitstechnische Anforderungen, Prüfungen
Entwurf Dez. 1988
- [Denoth, 1986] Denoth J.
Load on the locomotor system and modelling.
In: Nigg B.M. (ed) Biomechanics of running shoes. Human Kinetics Publishers, Illinois, (1986)
- [Erhardt, 1992] Erhardt M.W.
Computersimulation für lernfähige biomechanische Modelle.
Diplomarbeit am *Institut für Theoretische Physik und Synergetik an der Universität Stuttgart* (1992)
- [Gruber, 1987] Gruber K.
Entwicklung eines Modells zur Berechnung der Kräfte im Knie- und Hüftgelenk bei sportlichen Bewegungsabläufen mit hohen Beschleunigungen.
Dissertation, Tübingen, (1987)

- [Gruber, Denoth, Stuessi, Ruder, 1987] Gruber K., Denoth J., Stuessi E., Ruder H.
The Wobbling Mass Model.
In: International Series on Biomechanics 6B, (ed. B. Jonsson) Human Kinetics Publisher, Champaign, Ill., 1095-1099, (1987).
- [Hatze, 1981] Hatze H.
A comprehensive model for human motion simulation and its application to the take-off phase of the long jump.
J. Biomech. 14, 135-142, (1981)
- [Huston, Zernicke, 1981] Huston R.L., Zernicke R.F.
Computerized simulation of whole body dynamics: aspects of human movement modeling.
Biomechanics Cinematography 291, 180-186, (1981)
- [Kamke, 1944] Kamke E.
Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Band I, Gewöhnliche Differenzialgleichungen.
Akad. Verlagsgesellschaft Becker & Erler, Leipzig, (1944)
- [Krebs, 1991] Krebs T.
Biomechanische Simulationen an mehrgliedrigen Modellen zur Untersuchung von Bewegungsabläufen der Maus.
Diplomarbeit am *Lehr- und Forschungsbereich Theoretische Astrophysik an der Universität Tübingen* (1991)
- [Krieg, 1992] Krieg M.
Simulation und Steuerung biomechanischer Mehrkörpersysteme
Diplomarbeit am *Lehr- und Forschungsbereich Theoretische Astrophysik an der Universität Tübingen* (1992)
- [McMahon, 1984] McMahon T.A.
Muscles, Reflexes, and Locomotion.
Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1984)
- [Nigg, Denoth, 1980] Nigg B.M., Denoth J.
Sportplatzbeläge.
Juris Verlag, Zürich, (1980)
- [Seireg, Arvikar, 1975] Seireg, A. and Arvikar, R.J.
The prediction of muscular load sharing and joint forces in the lower extremities during walking.
J. Biomech. 8, 89-103, (1975)

- [Winter, 1984] Winter D.A.
Biomechanics of human movement with applications to the study of human locomotion.
CRC Critical reviews in biomedical engineering 9, Issue 4, 287-314, (1984)
- [Widmayer, 1990] Widmayer K.
Simulation von Bewegungsabläufen beim Menschen mit Hilfe von Mehrkörpersystemen.
Diplomarbeit am *Lehr- und Forschungsbereich Theoretische Astrophysik an der Universität Tübingen* (1990)

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Hanns Ruder für die hilfsbereite und engagierte Förderung meiner Arbeit. In zahlreichen fruchtbaren Gesprächen habe ich von ihm nützliche Anregungen und Ideen erhalten.

Frau Dr. Gruber danke ich für die geleistete Vorarbeit und die allzeit motivierende Zusprache. Ebenso ergeht mein Dank an die Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter des Lehr- und Forschungsbereichs Theoretische Astrophysik für das kooperative Arbeitsklima. Insbesondere gilt dies für die Kolleginnen und Kollegen der Arbeitsgruppe Biomechanik.

Für die freundliche Unterstützung meiner Arbeit von seiten des „Fachausschuß persönliche Schutzausrüstung“ danke ich Herrn Lawrenz, mit welchem ich immer gerne zusammengearbeitet habe.

Lebenslauf

Frank Hospach

Geboren am 30. April 1959 in Albstadt/Ebingen

Eltern:

Rolf Hospach, Industriekaufmann

Hansi Swanhild Hospach, geb. Debis, Friseurin

Schulen:

Grundschule Laupheim

4/66 - 6/69

Gymnasium Laupheim

8/69 - 5/78

Abitur am 26.5.1978

Zivildienst:

Kinder- und Jugendheim Piuspflege in Oggelsbeuren

7/78 - 10/79

Studium der Physik:

Eberhard-Karls-Universität Tübingen

WS 79/80 - SS 88

Prüfungen:

Vordiplom Physik

8.7.82

Hauptdiplom Physik

21.10.88

Promotion über das Thema:

„Computersimulationen von Abstürzen mittels biomechanischer Ganzkörpermodelle.“

SS 89 - WS 92/93

Berufliche Tätigkeiten:

Studentische Hilfskraft an der Universität Tübingen

85 - 88

Freiberufliche Programmierstätigkeit

90 - 91

Wissenschaftliche Hilfskraft am Lehr- und Forschungsbereich Theoretische Astrophysik der Universität Tübingen

89 - 92

Wissenschaftlicher Angestellter an der Universität

seit 12/92

Tübingen (Theoretische Astrophysik und Zentrum für Datenverarbeitung)

Meine akademischen Lehrer waren die Professoren:

Baumann, Fäßler, Gaukler, Gönnenwein, Grözl, Güttinger, Hübener, Kasper, Kaul, Krüger, Lenz, Lichte, Lutz, Mack, Mertens, Pfister, Ruder, Schief, Schwenk, Speidel, Staudt, Stumpf, Wagner, Wittorn, Wolff.